

公差 2 の等差数列の和で表される自然数

大塚美紀生

整数の定理として、

連続する 2 個以上の自然数の和として表されるための

必要十分条件は、2 の累乗でない自然数であること

はよく知られており、入試の題材としてもしばしば取り上げられている。^{注1}

本稿では、この定理の「連続する自然数の和」を「公差 2 の等差数列の和」にしても、美しい結果が得られることを報告したいと思う。なお、上の定理の証明は [1] に譲ることにする。

定理 2 以上の整数 n が、2 個以上の自然数から成る公差 2 の等差数列の和として表されるための必要十分条件は、 n が素数でないことである。

定理の証明

1° n が素数であるとき

n が初項 a (自然数)、項数 k (2 以上の整数) の等差数列の和であるとすれば、

$$n = \frac{k}{2} \{a + a + 2(k-1)\} = k(a+k-1)$$

n は素数で $k \geq 2$ であるから、

$$k = n \text{ かつ } a + k - 1 = 1$$

このとき $a + k = 2$ となるが、 $a \geq 1$ 、 $k \geq 2$ であるから矛盾する。

よって、素数は 2 個以上の自然数から成る公差 2 の等差数列の和とはならない。

2° n が 4 以上の偶数(偶数の合成数^{注2})であるとき

$n = 2m$ (m は 2 以上の整数)とおくと、

$$2m = (m-1) + (m+1)$$

と表され、 $m-1$ も $m+1$ も自然数である。

3° 自然数 n が奇数の合成数^{注2}であるとき^{注3}

n の最小の素因数を $2a+1$ (a は自然数)として

$$n = (2a+1)b$$

とおくと、

$$\begin{aligned} n &= b + a \times 2b \\ &= b + \sum_{k=1}^a \{(b-2k) + (b+2k)\} \\ &= (b-2a) + (b-2a+2) + (b-2a+4) + \cdots + (b-2) \\ &\quad + b + (b+2) + \cdots + (b+2a) \end{aligned}$$

と表される。 n が素数でないことと素因数 $2a + 1$ の最小性より

$$2a < 2a + 1 \leq b$$

であるから，上の表示は自然数から成る公差 2 の等差数列の和となる。

以上により，定理が証明された。^{注4}

注1 1999年センター試験本試験や2002年上智大学理工学部などで出題されている。

注2 合成数とは，(重複も含めて)2つ以上の素数の積で表される整数のことである。

注3 この場合，必然的に n は9以上の奇数である。

注4 念のために確認しておくとして， 1° (の対偶)が「自然数の公差 2 の等差数列の和で表されるならば素数でない」ことの証明， 2° ， 3° が「素数でないならば自然数の公差 2 の等差数列の和で表される」ことの証明になっている。

参考文献

- [1] 整数問題にチャレンジ 第133回(2012年2月)，早稲田数学フォーラム
<http://homepage2.nifty.com/wasmath/seisuu133.pdf>