

① $y = x^2 - 1$ と $y = x^2 - 2ax + 2$ は平行移動すれば重なるから, C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で接するのは $-1 < x_0 < 1$ のときであり,

$$\begin{cases} -x_0^2 + 1 = x_0^2 - 2ax_0 + 2 & \dots\dots ① \\ -2x_0 = 2x_0 - 2a & \dots\dots ② \end{cases}$$

②より

$$x_0 = \frac{a}{2}$$

①に代入して

$$2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a}{2} + 1 = 0 \quad \therefore a^2 = 2$$

$a > 0$ より

$$a = \sqrt{2}, \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \end{cases}$ より y を消去すると

$$2\sqrt{2}x - 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - (-x^2 + 1)\} dx \\ &\quad + \int_1^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - (x^2 - 1)\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx + \int_1^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} (-2\sqrt{2}x + 3) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 + \left[-\sqrt{2}x^2 + 3x \right]_1^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \sqrt{2} \left(\frac{9}{8} - 1\right) + 3 \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - 1\right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{17\sqrt{2}}{8} - 3 \\ &= \frac{-32 + 23\sqrt{2}}{24} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

2

(1) $\angle BAP = \theta$ とおくと, 直角三角形 ABP において

$$AP = \frac{1}{\cos \theta}$$

AP の中点を M とおき, 直角三角形 AQM において

$$AQ = \frac{AM}{\cos \theta} = \frac{AP}{2 \cos \theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta}$$

直角三角形 AQR において

$$\begin{aligned} QR &= \frac{AQ}{\sin \theta} = \frac{1}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{1}{2 \sin \angle BAP (1 - \sin^2 \angle BAP)} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 点 P は辺 BC 上で点 B とは異なるから

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

 $x = \sin \theta$ とおくと

$$0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であり, (1)より

$$QR = \frac{1}{2x(1-x^2)}$$

 $f(x) = 2x(1-x^2) = 2x - 2x^3$ とおくと

$$f'(x) = 2 - 6x^2 = -6\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

x	(0)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	極大	↘

よって, $f(x)$ の最大値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

であり,

$$\text{QR の長さ } \frac{1}{f(x)} \text{ の最小値は } \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

である。

3 連続する 3 整数の 1 つは 3 の倍数であるから,

$$\begin{aligned}n^3 - 7n + 9 &= n^3 - n - 6n + 9 \\ &= (n-1)n(n+1) - 3(2n-3)\end{aligned}$$

は (整数 n によらず) つねに 3 の倍数であり, 素数であるとすれば

$$n^3 - 7n + 9 = 3$$

に限られる。このとき

$$n^3 - 7n + 6 = (n-1)(n-2)(n+3) = 0$$

$$\therefore n = -3, 1, 2 \quad (\text{答})$$

(注) 答案としてはこれだけで十分であるが, 実際に解答する際は, $n^3 - 7n + 9$ に $n = 1, 2, 3, \dots$ と代入してみて探りを入れるなど, 試行錯誤を重ねることになる。

4

(1) $AC = BD$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \therefore 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

 $AD = BC$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AD}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \therefore 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

P は AB の中点, Q は CD の中点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \therefore \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \end{aligned}$$

①, ②を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}(-|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2} \left(-|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから, AB と PQ は垂直である。

(証明おわり)

(2) 平面 α が四面体 ABCD と辺 AC 上の点 E, 辺 BD 上の点 F を通るとし,

$$AE : EC = s : (1 - s), \quad BF : FD = t : (1 - t)$$

とおくと, 点 F は平面 PQE 上にあるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= (1 - t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} \\ &= u\overrightarrow{AP} + v\overrightarrow{AQ} + w\overrightarrow{AE} \quad (u + v + w = 1) \\ &= \frac{u}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{v}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{v}{2}\overrightarrow{AD} + sw\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

と表される。 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ は 1 次独立であるから

$$\begin{aligned} 1 - t &= \frac{u}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 = \frac{v}{2} + sw \quad \text{かつ} \quad t = \frac{v}{2} \\ \therefore \frac{u + v}{2} &= 1, \quad sw = -\frac{v}{2}, \quad t = \frac{v}{2} \end{aligned}$$

 $u + v + w = 1$ より

$$u + v = 2, \quad w = -1, \quad s = t = \frac{v}{2}$$

$\triangle APE = \frac{1}{2}s\triangle ABC$ より, 四面体 ABCD の体積を V とすると,

$$\text{四面体 APED の体積は } \frac{1}{2}sV \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\triangle PFD = \frac{1}{2}(1-t)\triangle ABD$, $AE = sAC$ より

$$\text{四面体 DPEF の体積は } \frac{1}{2}s(1-t)V \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\triangle DFQ = \frac{1}{2}(1-t)\triangle BCD$, $EC = (1-s)AC$ より

$$\text{四面体 DQEF の体積は } \frac{1}{2}(1-s)(1-t)V \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

③ + ④ + ⑤ と $s = t$ より, 平面 α で四面体 ABCD を分けたとき点 A の側にある部分の体積は

$$\frac{1}{2}\{s + s(1-t) + (1-s)(1-t)\}V = \frac{s-t+1}{2}V = \frac{1}{2}V$$

であり, 平面 α により分けられた 2 つの部分の体積は等しい。 (証明おわり)

5

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n k - \frac{(n+2)(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{n^2+n-2}{2} = 1$$

を考えると, $X_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ となるのは

$n-1$ 回目まで 0 の球, n 回目に 0 または $n-1$ の球を取り出す
場合であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \frac{2}{n} = \frac{2}{n!} \quad (\text{答})$$

(2) $X_n \leq n+1$ となるのは,

2 回目以降 1 の球のみ取り出す,

または

2 回目以降 0 の球を 1 回, 1 の球を $n-2$ 回取り出す

場合であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \cdots \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{k-1}{k+1} \cdots \frac{n-2}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \times (n-1) \\ &= \frac{2}{n} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$