

1

(1) C_1 と C_2 が $x = t$ で接するとすれば,

$$\begin{cases} at^2 = b(t-1)^2 + c & \dots\dots ① \\ 2at = 2b(t-1) & \dots\dots ② \end{cases}$$

②を①に代入して b を消去すると

$$at^2 = at(t-1) + c \quad \therefore at = c$$

 $a \neq 0$ より

$$t = \frac{c}{a}, \quad at^2 = a\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a}$$

$$\text{接点の座標は} \left(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a}\right) \quad (\text{答})$$

(2)

$$x = \frac{c}{a} \neq 0 \quad \dots\dots ③$$

$$y = \frac{c^2}{a} \neq 0 \quad \dots\dots ④$$

とおく。

$$b(t-1) = b\left(\frac{c}{a} - 1\right) = at = c \neq 0$$

であることにも注意すると, $a \neq c$ であるから, ③より

$$x \neq 1 \quad \dots\dots ⑤$$

④ ÷ ③より

$$c = \frac{y}{x}$$

③より

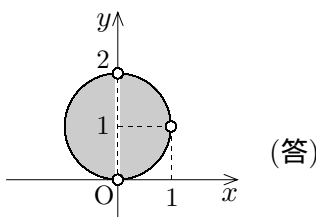
$$a = \frac{c}{x} = \frac{y}{x^2}$$

条件(i)より a, c を消去すると

$$1 + \frac{y^2}{x^2} \leq 2 \cdot \frac{y}{x^2}$$

$$\therefore x \neq 0 \text{ かつ } y \neq 0 \text{ かつ } x^2 + y(y-2) \leq 0 \quad \dots\dots ⑥$$

C_1 と C_2 の接点が動く範囲は ⑤ かつ ⑥ であり, 図示すると, 次図の網目部分となる。ただし, y 軸上の点と点 $(1, 1)$ は含まず, その他の境界線上の点は含む。



2 連続する 3 整数の 1 つは 3 の倍数であるから,

$$\begin{aligned}n^3 - 7n + 9 &= n^3 - n - 6n + 9 \\ &= (n-1)n(n+1) - 3(2n-3)\end{aligned}$$

は (整数 n によらず) つねに 3 の倍数であり, 素数であるとすれば

$$n^3 - 7n + 9 = 3$$

に限られる。このとき

$$n^3 - 7n + 6 = (n-1)(n-2)(n+3) = 0$$

$$\therefore n = -3, 1, 2 \quad (\text{答})$$

(注) 答案としてはこれだけで十分であるが, 実際に解答する際は, $n^3 - 7n + 9$ に $n = 1, 2, 3, \dots$ と代入してみて探りを入れるなど, 試行錯誤を重ねることになる。

3 $\angle BAC = \theta$ ($0 < \theta < \alpha$) とおくと, $\triangle ABC$ において
正弦定理より

$$AB = 2 \sin(\pi - \alpha - \theta) = 2 \sin(\alpha + \theta)$$

$$BC = 2 \sin \theta$$

四角形 ABCD は $AB \parallel DC$ となる等脚台形であるから

$$AD = BC = 2 \sin \theta$$

$$CD = AB - 2 BC \cos \alpha$$

$$= 2 \sin(\alpha + \theta) - 4 \sin \theta \cos \alpha$$

$$= 2(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) - 4 \cos \alpha \sin \theta$$

$$= 2(\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta)$$

$$= 2 \sin(\alpha - \theta)$$

$k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$ を θ, α で表すと

$$k = 2 \sin(\alpha + \theta) \cdot 2 \sin \theta \cdot 2 \sin(\alpha - \theta) \cdot 2 \sin \theta$$

$$= 4 \cdot 2 \sin^2 \theta \cdot 2 \sin(\alpha + \theta) \sin(\alpha - \theta)$$

$$= 4(1 - \cos 2\theta)(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$$

$$= -4 \left(\cos 2\theta - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right)$$

$$\times \left(\cos 2\theta - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right)$$

$$= -4 \left(\cos 2\theta - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)^2 + (1 - \cos 2\alpha)^2$$

$0 < \theta < \alpha$ より

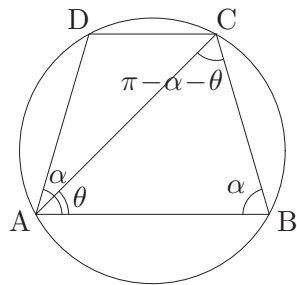
$$\cos 2\alpha < \cos 2\theta < 1$$

であるから,

$$\cos 2\theta = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \text{ のとき } k \text{ は最大}$$

であり,

$$k \text{ の最大値は } (1 - \cos 2\alpha)^2 \quad (\text{答})$$



4

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$\overline{\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$$

であるから, 任意の自然数 k に対して

$$z_k \text{ は } 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ のいずれか}$$

であることに注意する。

$$z_k = 1 \text{ となる確率を } p_k, \quad z_k = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ となる確率を } q_k \text{ とすると,}$$

$z_{k+1} = 1$ となるのは

$$z_k = 1, \quad z_{k+1} = \overline{z_k} \text{ または } z_k = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad z_{k+1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} z_k$$

の場合であるから,

$$p_{k+1} = \frac{1}{2}p_k + \frac{1}{2}(1 - p_k - q_k) = \frac{1}{2}(1 - q_k) \dots\dots \textcircled{1}$$

$z_{k+1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ となるのは

$$z_k = 1, \quad z_{k+1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} z_k \text{ または } z_k = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad z_{k+1} = \overline{z_k}$$

の場合であるから,

$$q_{k+1} = \frac{1}{2}p_k + \frac{1}{2}(1 - p_k - q_k) = \frac{1}{2}(1 - q_k) \dots\dots \textcircled{2}$$

②の両辺から $\frac{1}{3}$ を引くと

$$q_{k+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_k - \frac{1}{3}\right)$$

$\left\{q_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $q_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$q_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore q_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$p_1 = q_1 = \frac{1}{2}$ であり, ①, ②より $p_n = q_n$ ($n \geq 2$) であるから,

$$p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad (\text{答})$$

5

(1) $(\log x)' = \frac{1}{x}$ より, $x = t$ における $y = \log x$ の法線の傾きは $-t$ であり,

\vec{AB} は x 成分が正である単位ベクトルであるから

$$\vec{AB} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, -t)$$

$\vec{OB} = (u(t), v(t)) = \vec{OA} + \vec{AB}$ より

$$(u(t), v(t)) = \left(t + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \log t - \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \right) \quad (\text{答})$$

t で微分して

$$\frac{du}{dt} = 1 - \frac{1}{2}(t^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2t = 1 - t(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{t} - 1 \cdot (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} - t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(t^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2t \\ &= \frac{1}{t} - (t^2+1)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) = \left(1 - t(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{t} - (t^2+1)^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 &= 1 + \frac{1}{t^2} - 2 \left(t + \frac{1}{t} \right) (t^2+1)^{-\frac{3}{2}} + (t^2+1)(t^2+1)^{-3} \\ &= \frac{t^2+1}{t^2} - \frac{2}{t\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{(t^2+1)^3 - 2t(t^2+1)^{\frac{3}{2}} + t^2}{t^2(t^2+1)^2} \\ &= \frac{\left\{ (t^2+1)^{\frac{3}{2}} - t \right\}^2}{t^2(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

曲線の長さの公式より

$$\begin{aligned} L_1(r) - L_2(r) &= \int_r^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} dt - \int_r^1 \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_r^1 \left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} - \frac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - t}{t(t^2+1)} \right) dt \\ &= \int_r^1 \frac{1}{t^2+1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r)) &= \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} (\tan \theta)' d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

6

(1) $AC = BD$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \therefore 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

 $AD = BC$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AD}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \therefore 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

P は AB の中点, Q は CD の中点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \therefore \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \end{aligned}$$

①, ②を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}(-|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2} \left(-|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから, AB と PQ は垂直である。

(証明おわり)

(2) 平面 α が四面体 ABCD と辺 AC 上の点 E, 辺 BD 上の点 F を通るとし,

$$AE : EC = s : (1 - s), \quad BF : FD = t : (1 - t)$$

とおくと, 点 F は平面 PQE 上にあるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= (1 - t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} \\ &= u\overrightarrow{AP} + v\overrightarrow{AQ} + w\overrightarrow{AE} \quad (u + v + w = 1) \\ &= \frac{u}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{v}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{v}{2}\overrightarrow{AD} + sw\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

と表される。 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ は 1 次独立であるから

$$\begin{aligned} 1 - t &= \frac{u}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 = \frac{v}{2} + sw \quad \text{かつ} \quad t = \frac{v}{2} \\ \therefore \frac{u + v}{2} &= 1, \quad sw = -\frac{v}{2}, \quad t = \frac{v}{2} \end{aligned}$$

 $u + v + w = 1$ より

$$u + v = 2, \quad w = -1, \quad s = t = \frac{v}{2}$$

$\triangle APE = \frac{1}{2}s\triangle ABC$ より, 四面体 ABCD の体積を V とすると,

$$\text{四面体 APED の体積は } \frac{1}{2}sV \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\triangle PFD = \frac{1}{2}(1-t)\triangle ABD$, $AE = sAC$ より

$$\text{四面体 DPEF の体積は } \frac{1}{2}s(1-t)V \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\triangle DFQ = \frac{1}{2}(1-t)\triangle BCD$, $EC = (1-s)AC$ より

$$\text{四面体 DQEF の体積は } \frac{1}{2}(1-s)(1-t)V \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

③ + ④ + ⑤ と $s = t$ より, 平面 α で四面体 ABCD を分けたとき点 A の側にある部分の体積は

$$\frac{1}{2}\{s + s(1-t) + (1-s)(1-t)\}V = \frac{s-t+1}{2}V = \frac{1}{2}V$$

であり, 平面 α により分けられた 2 つの部分の体積は等しい。 (証明おわり)