

1

(30 点)

0 でない実数 a, b, c は次の条件(i)と(ii)を満たしながら動くものとする.

(i) $1 + c^2 \leq 2a$.

(ii) 2つの放物線 $C_1: y = ax^2$ と $C_2: y = b(x - 1)^2 + c$ は接している.

ただし, 2つの曲線が接するとは, ある共有点において共通の接線をもつことであり, その共有点を接点という.

(1) C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ.

(2) C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め, その範囲を図示せよ.

2

(30 点)

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ.

3

(35 点)

α は $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし, 四角形 ABCD に関する次の2つの条件を考える.

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する.

(ii) $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$.

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで, 4辺の長さの積

$$k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$$

が最大となるものについて, k の値を求めよ.

4

(35 点)

コインを n 回投げて複素数 z_1, z_2, \dots, z_n を次のように定める.

- (i) 1 回目に表が出れば $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とし、裏が出れば $z_1 = 1$ とする.
- (ii) $k = 2, 3, \dots, n$ のとき、 k 回目に表が出れば $z_k = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$ とし、裏が出れば $z_k = \overline{z_{k-1}}$ とする. ただし、 $\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である.

このとき、 $z_n = 1$ となる確率を求めよ.

5

(35 点)

曲線 $y = \log x$ 上の点 $A(t, \log t)$ における法線上に、点 B を $AB = 1$ となるようにとる. ただし B の x 座標は t より大きいとする.

- (1) 点 B の座標 $(u(t), v(t))$ を求めよ. また $\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)$ を求めよ.
- (2) 実数 r は $0 < r < 1$ を満たすとし、 t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r), L_2(r)$ とする. このとき、極限 $\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r))$ を求めよ.

6

(35 点)

四面体 $ABCD$ は $AC = BD, AD = BC$ を満たすとし、辺 AB の中点を P 、辺 CD の中点を Q とする.

- (1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ.
- (2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 $ABCD$ を切って 2 つの部分に分ける. このとき、2 つの部分の体積は等しいことを示せ.

問題は、このページで終わりである.