

1

- (1) 実数係数 3 次方程式 $f(x) - 4 = 0$ が虚数 $1 + 2i$ を解に持つから, その共役複素数 $1 - 2i$ も解に持ち, x の恒等式

$$f(x) - 4 = a\{x - (1 + 2i)\}\{x - (1 - 2i)\}(x - b) \quad (a \neq 0, b \text{ は実数})$$

が成り立つ。

$$f(x) = a(x^2 - 2x + 5)(x - b) + 4 \quad \dots\dots (*)$$

$$f(1 + i) = a \cdot 3 \cdot (1 + i - b) + 4 = 4 + 3i$$

であるから, 実部と虚部をそれぞれ比べると

$$\begin{cases} 3a(1 - b) + 4 = 4 \\ 3a = 3 \end{cases} \quad \therefore a = 1, b = 1$$

(*) に代入して

$$f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x - 1) + 4 = x^3 - 3x^2 + 7x - 1 \quad (\text{答})$$

- (2) $A(t, at^2)$ とおく。

$$\begin{aligned} AP^2 &= (t - 0)^2 + (at^2 - p)^2 \\ &= a^2 t^4 - (2ap - 1)t^2 + p^2 \\ &= a^2 \left(t^4 - \frac{2ap - 1}{a^2} t^2 \right) + p^2 \\ &= a^2 \left(t^2 - \frac{2ap - 1}{2a^2} \right)^2 - \frac{(2ap - 1)^2}{4a^2} + p^2 \\ &= a^2 \left(t^2 - \frac{2ap - 1}{2a^2} \right)^2 + \frac{p}{a} - \frac{1}{4a^2} \end{aligned}$$

は $t = 0$ で最小となるから,

$$\frac{2ap - 1}{2a^2} \leq 0$$

$a > 0, p > 0$ より $a \leq \frac{1}{2p}$ であるから, p を固定したとき,

$$a \text{ の最大値は } \frac{1}{2p} \quad (\text{答})$$

- (3) 点 P が点 k から出発して点 5 に到達(して終了)する確率を p_k ($k = 1, 2, 3, 4$) とする。点 4 から出発して点 5 に到達するのは, 確率 $\frac{2}{3}$ で点 5 に到達するか, 確率 $\frac{1}{3}$ で点 3 に移ってから点 5 に到達するかのいずれかの場合であるから,

$$p_4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} p_3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

点 3 から出発して点 5 に到達するのは, 確率 $\frac{2}{3}$ で点 4 に移るか, 確率 $\frac{1}{3}$ で点 2 に

移るかのいずれかののちに点 5 に到達する場合であるから ,

$$p_3 = \frac{2}{3}p_4 + \frac{1}{3}p_2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

以下 , 同様に考えて

$$p_2 = \frac{2}{3}p_3 + \frac{1}{3}p_1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$p_1 = \frac{2}{3}p_2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

も成り立つ。①を②に代入して

$$p_3 = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}p_3 \right) + \frac{1}{3}p_2$$

$$\frac{7}{9}p_3 = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}p_2 \quad \therefore p_3 = \frac{3}{7}p_2 + \frac{4}{7}$$

③に代入して

$$p_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{7}p_2 + \frac{4}{7} \right) + \frac{1}{3}p_1$$

$$\frac{5}{7}p_2 = \frac{8}{21} + \frac{1}{3}p_1 \quad \therefore p_2 = \frac{7}{15}p_1 + \frac{8}{15}$$

④より p_2 を消去すると

$$\frac{3}{2}p_1 = \frac{7}{15}p_1 + \frac{8}{15} \quad \therefore p_1 = \frac{30}{31} \times \frac{8}{15} = \frac{16}{31} \quad (\text{答})$$

(4) $\lim_{a \rightarrow \infty}$ を考えるのだから , $a > 1$ として考えればよい。

円 $x^2 + y^2 = 1$ と曲線 $y = \frac{e^{ax}}{a}$ が 2 点

$$(\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \beta, \sin \beta) \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \right)$$

で交わるとする。 $\sin \alpha = \frac{e^{a \cos \alpha}}{a}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より

$$\log(a \sin \alpha) = \log e^{a \cos \alpha} = a \cos \alpha$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\log(a \sin \alpha)}{a}$$

$y = \frac{e^{ax}}{a}$ は増加関数であるから ,

$$\frac{1}{a} < \frac{e^{a \cos \alpha}}{a} = \sin \alpha < 1$$

$$1 < a \sin \alpha < a \quad \therefore 0 = \frac{\log 1}{a} < \cos \alpha < \frac{\log a}{a}$$

$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log a}{a} = 0$ であるから , ハサミウチの原理より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \cos \alpha = 0$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0 < \sin \beta < \frac{1}{a}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sin \beta = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi \text{ より}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \beta = \pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx - \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \frac{e^{ax}}{a} dx \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

と表される。①, ②より

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= (\text{半径 } 1 \text{ の } 4 \text{ 分円の面積}) \\ &= \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{a \cos \alpha}}{a}, \quad \sin \beta = \frac{e^{a \cos \beta}}{a} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \frac{e^{ax}}{a} dx &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \right]_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{a^2} (e^{a \cos \alpha} - e^{a \cos \beta}) \\ &= \frac{1}{a^2} (a \sin \alpha - a \sin \beta) \\ &= \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{a} \end{aligned}$$

$0 < \sin \alpha < 1, \quad 0 < \sin \beta < 1$ より $-1 < \sin \alpha - \sin \beta < 1$ であるから

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \frac{e^{ax}}{a} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{a} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

③, ④, ⑤より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})$$

2

(1) AB の中点を M とする。

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}| \text{ ならば,}$$

$$|2\vec{OM} + \vec{OC}|^2 = |2\vec{OM} + \vec{OD}|^2$$

$$4\vec{OM} \cdot \vec{OC} + |\vec{OC}|^2 = 4\vec{OM} \cdot \vec{OD} + |\vec{OD}|^2$$

 $|\vec{OC}| = |\vec{OD}| = (\text{円の半径})$ であるから,

$$\vec{OM} \cdot \vec{OC} = \vec{OM} \cdot \vec{OD}$$

$$\therefore \vec{OM} \cdot (\vec{OD} - \vec{OC}) = \vec{OM} \cdot \vec{CD} = 0$$

 $\vec{CD} \neq \vec{0}$ より

$$\vec{OM} = \vec{0} \text{ または } OM \perp CD$$

 $\vec{OM} = \vec{0}$ のとき $M = O$ であり, 特に点 O は辺 AB の中点である。

円の性質より, 線分 OM は弦 AB と垂直であるから, $OM \perp CD$ のとき $AB \parallel CD$ である。 (証明おわり)

(2) $\triangle ABC$ の重心と $\triangle ABD$ の重心が点 O から等距離にあることにより,

$$\left| \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}}{3} \right|$$

であるから, (1) の考察より

$AB \parallel CD$ または「 AB は外接円の直径」

となる。同様に, $\triangle ABC$ と $\triangle BCD$ の重心が点 O から等距離にあることより

$BC \parallel AD$ または「 BC は外接円の直径」

となる。ここで, AB が四角形 $ABCD$ の外接円の直径であるとすれば, $BC \parallel AD$ にも中心 O が BC の中点にもなり得ないから,

$AB \parallel CD$

同じ議論により

$BC \parallel AD$

も成り立つから,

四角形 $ABCD$ は円に内接する平行四辺形

である。このとき, 同側内角は互いに補角, 対角も互いに補角であるから, 平行四辺形 $ABCD$ の内角の大きさはすべて等しくなり,

四角形 $ABCD$ は長方形

である。

(証明おわり)

3

$$(1) \left| 1 + \frac{i}{n} \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2 \cdot \frac{1}{2n}} \\ &= e^0 = 1 \quad (\text{答}) \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$(2) \quad 1 + \frac{i}{n} = \left| 1 + \frac{i}{n} \right| (\cos \theta_n + i \sin \theta_n) \quad (\theta_n \text{ は実数})$$

とおくと、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{i}{n} \right)^n &= \left| 1 + \frac{i}{n} \right|^n (\cos n\theta_n + i \sin n\theta_n) \\ &= a_n + ib_n \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

θ_n の定め方より

$$\sin \theta_n = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \quad \dots\dots ③$$

これより $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta_n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} = 1 \quad \dots\dots ④$$

③より

$$n\theta_n = \frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

であるから、④より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = 1 \quad \dots\dots ⑤$$

①, ②, ⑤より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|^n \cos n\theta_n = \cos 1 \quad (\text{答})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|^n \sin n\theta_n = \sin 1 \quad (\text{答})$$

(注) 大学入試の答案では使えないが、大学で学ぶ数学の知識を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{\frac{n}{i}} \right\}^i = e^i = \cos 1 + i \sin 1$$

が得られ、高校までの範囲内で考えるより簡単になる。

4

$$(1) f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \text{ とおくと, } f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

点 $(1, 1)$ における $C_1: y = f(x)$ の接線 L_1 の方程式は

$$y = \frac{3}{2}(x-1) + 1 \quad \therefore y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$y = x^2$ と連立して y を消去すると

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \therefore x = 1, \frac{1}{2}$$

L_1 と C_2 の 2 交点は $(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ であり, 2 交点を結ぶ線分の長さは

$$\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4} \quad (\text{答})$$

(2) C_1 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを l_1 とすると

$$\begin{aligned} l_1 &= \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) C_2 上の 3 点 $(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), (1, 1)$ を結ぶ折れ線の長さ l は

$$l = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{13}}{4}$$

$C_2: y = x^2$ は下に凸であるから, C_2 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを l_2 とすると,

$$l_2 > l$$

を満たす。

$$\begin{aligned} l - l_1 &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{13}}{4} - \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{27 - 52}{4 \times 27} \sqrt{13} + \frac{8}{27} \\ &= \frac{27\sqrt{5} - 25\sqrt{13} + 32}{4 \times 27} \end{aligned}$$

$$> \frac{27 \times 2.23 - 25 \times 3.61 + 32}{108} = \frac{60.21 - 90.25 + 32}{108} > 0$$

より

$$l > l_1$$

であるから,

$$l_2 > l > l_1$$

(証明おわり)

(参考) C_2 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さ l_2 は,

$$l_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

により求められる。

$$2x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (t > 0)$$

により置換すると, 積分区間は

$$0 \leq \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right) \leq 1$$

より

$$t^2 - 1 \leq 0 \quad \text{かつ} \quad t^2 - 4t - 1 \leq 0 \quad \text{かつ} \quad t > 0$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 2 + \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= \int_1^{2+\sqrt{5}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right)^2} \cdot \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right)' dt \\ &= \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{1}{2} \sqrt{4t \cdot \frac{1}{t} + \left(t - \frac{1}{t} \right)^2} \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \int_1^{2+\sqrt{5}} \left(t + \frac{1}{t} \right) \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \int_1^{2+\sqrt{5}} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + 2 \log t \right]_1^{2+\sqrt{5}} \\ &= \frac{(\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 2)^2}{16} + 2 \log(2 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \log(2 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$