

1 以下の各問の解答を所定欄に記入せよ。

- (1) 実数を係数とする3次式 $f(x)$ は $f(1+i) = 4+3i$ かつ $f(1+2i) = 4$ を満たすとする。このとき $f(x)$ を求めよ。
- (2) a と p を正の実数とする。座標平面上に原点 $O(0,0)$ を通る放物線 $y = ax^2$ と点 $P(0,p)$ がある。点 A がこの放物線上を動くとき、線分 AP の長さは $A = O$ において最小値をとるとする。 p を固定したとき、この条件を満たすような a の最大値を p を用いて表せ。
- (3) 点 P は、数直線上の点 1 から出発し、さいころの出る目が $1, 2, 3, 4$ ならば $+1$ だけ、 $5, 6$ ならば -1 だけ動く。この試行を繰り返し、点 P が点 0 または点 5 に到達したときに試行は終了するものとする。点 P が点 5 に到達して終了する確率を求めよ。
- (4) a を正の実数とする。座標平面において不等式 $x^2+y^2 \leq 1$ と不等式 $y \geq \frac{e^{ax}}{a}$ の表す領域の共通部分の面積を $S(a)$ とするとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ を求めよ。

2 AC および BD を対角線にもつ4角形 $ABCD$ があり、点 O を中心とする円が4角形 $ABCD$ に外接しているとする。ベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表す。

- (1) ベクトル $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ と $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$ の大きさが等しいならば、辺 AB と辺 CD は平行であるかまたは点 O は辺 AB 上にあることを証明せよ。
- (2) 3角形 ABC, BCD, CDA, DAB の重心がすべて点 O から等しい距離にあるならば、4角形 $ABCD$ は長方形であることを証明せよ。

3 すべての正の実数 x に対して $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3$ であり、また $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ であることが知られている。以下では n は自然数とし、 i は虚数単位を表すとする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|1 + \frac{i}{n}\right|^n$ を求めよ。

(2) $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$ の実部を a_n 、虚部を b_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

4 座標平面上に、 $y = x\sqrt{x}$ ($x \geq 0$) で表される曲線 C_1 、および $y = x^2$ ($x \geq 0$) で表される曲線 C_2 がある。点 $(1, 1)$ における曲線 C_1 の接線を L_1 とする。以下の計算では、必要ならば $\sqrt{5} = 2.236\dots$ 、 $\sqrt{13} = 3.605\dots$ を用いてもよい。

(1) 接線 L_1 と曲線 C_2 の 2 つの交点を結ぶ線分の長さを求めよ。

(2) 曲線 C_1 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを求めよ。

(3) 曲線 C_2 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さは、曲線 C_1 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さより大きいことを証明せよ。

[以下余白]