

1

(1) $6^{789} = 2^{789} \times 3^{789}$ が $72^n = 2^{3n} \times 3^{2n}$ の約数となるのは,

$$3n \geq 789 \quad \text{かつ} \quad 2n \geq 789$$

のときであり,

$$n \geq \frac{789}{2} = 394 + \frac{1}{2}$$

最小の自然数は $n = 395$ (答)

(2) $(|x| - 1)^2$ は偶関数, $x(|x| - 1)^2$ は奇関数であることを考えて,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x+2)(|x|-1)^2 dx &= \int_{-1}^1 x(|x|-1)^2 dx + \int_{-1}^1 2(|x|-1)^2 dx \\ &= 0 + 2 \int_0^1 2(|x|-1)^2 dx \\ &= 4 \int_0^1 (x-1)^2 dx \\ &= 4 \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

2 加法定理より

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \gamma} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta + (1 - \tan \alpha \tan \beta) \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - (\tan \alpha + \tan \beta) \tan \gamma} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - (\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha)}\end{aligned}$$

であるから,

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

を満たすとき,

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

$-\frac{3}{2}\pi < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi$ の範囲では

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \pm\pi \quad (\text{答})$$

3 接線 l の方程式は

$$y = -2t(x - t) + 1 - t^2$$
$$\therefore y = -2tx + t^2 + 1$$

直線 $y = 1$ との交点は

$$A\left(\frac{t}{2}, 1\right)$$

x 軸 ($y = 0$) との交点は

$$B\left(\frac{t^2 + 1}{2t}, 0\right)$$

台形 APOB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2 + 1}{2t}\right) \cdot 1 = \frac{2t^2 + 1}{4t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2t}\right)$$

$t > 0$ を考えて、相加・相乗平均の不等式より

$$S \geq \sqrt{t \cdot \frac{1}{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで、不等式の等号は

$$t = \frac{1}{2t} \text{ かつ } 0 < t \leq 1$$

のとき成り立つから、 S は

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$

をとる。

4

(1) 三角形 OAB と直線 PR に対してメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BQ}{QO} \cdot \frac{OP}{PA} = \frac{AR}{RB} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad \therefore \frac{AR}{RB} = \frac{15}{2}$$

点 R は AB を 15 : 2 に外分するから, 分点公式より

$$\vec{OR} = \frac{-2\vec{a} + 15\vec{b}}{15 - 2} = -\frac{2}{13}\vec{a} + \frac{15}{13}\vec{b} \quad (\text{答})$$

(2) (1)より

$$AB : BR = 13 : 2$$

三角形 PAR と直線 OB に対してメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{PQ}{QR} \cdot \frac{RB}{BA} \cdot \frac{AO}{OP} = \frac{PQ}{QR} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{4}{1} = 1$$

$$\therefore PQ : QR = 13 : 8 \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{cases} |\vec{a}| = 2 \\ |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 \\ 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 12 \end{cases}$$

を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の連立方程式として解くと,

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

面積公式を用いると

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \times 3 - 1^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

P, Q の内分の比に注目して

$$\triangle OPQ = \frac{1}{4} \times \frac{5}{7} \times \triangle OAB = \frac{5\sqrt{11}}{56} \quad (\text{答})$$

(1), (2) の考察でわかった図形量も用いて

$$\triangle QBR = \frac{2}{13} \triangle ABQ = \frac{2}{13} \times \frac{2}{7} \times \triangle OAB = \frac{2\sqrt{11}}{91} \quad (\text{答})$$