

1

(1) 真数条件より

$$x - 5 > 0 \text{ かつ } x - 3 > 0$$

$$\therefore x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①のもとで、与えられた方程式は

$$2\log_3(x - 5) = \log_3(x - 3) + 2\log_3 3$$

$$\log_3(x - 5)^2 = \log_3 3^2(x - 3)$$

$$(x - 5)^2 = 9(x - 3)$$

$$\therefore x^2 - 19x + 52 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より

$$x = \frac{19 + \sqrt{153}}{2} \quad (\text{答})$$

(2) $x^3 - 3x = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, $-\sqrt{3} < -1 < 0 < \sqrt{3} < 2$ より

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 |x^3 - 3x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (x^3 - 3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4} \times 9 + \frac{3}{2} \times 3\right) \times 2 + \frac{1}{4} \times 16 - \frac{3}{2} \times 4 \\ &= \frac{5}{4} + \frac{9}{2} - 2 \\ &= \frac{15}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

2

- (1) 小さい袋に白玉がはいっていないのは，9 番目と 10 番目が赤玉のときであるから，求める確率は

$$\frac{{}_6P_2 \times 8!}{10!} = \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

- (2) 大中小の袋に白玉 4 個が

2 個，1 個，1 個，または 1 個，2 個，1 個

の順に入る場合に分けて，どの袋にも赤玉と白玉の両方が入っている確率は

$$\begin{aligned} & \frac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_3 \times {}_2C_1 \cdot {}_3C_2 + {}_4C_1 \cdot {}_6C_4 \times {}_3C_2 \cdot {}_2C_1}{{}_{10}C_2 \times {}_8C_3} \\ &= \frac{6 \times 20 \times 2 \times 3 + 4 \times 15 \times 3 \times 2}{45 \times 56} \\ &= \frac{360 \times (2 + 1)}{2520} \\ &= \frac{3}{7} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (注) 設定は順列であるが，事象は各袋ごとの条件で定まっているので，組合せで立式しても確率の値は変わらない。

3

$$a_{n+1} = 2a_n + n^2$$

(1) $a_{n+1} + f(n+1) = 2(a_n + f(n))$ が成り立つとき,

$$2a_n + n^2 + p(n+1)^2 + q(n+1) + r = 2a_n + 2(pn^2 + qn + r)$$

$$(p+1)n^2 + (2p+q)n + p+q+r = 2pn^2 + 2qn + 2r$$

係数を比べると

$$\begin{cases} p+1 = 2p \\ 2p+q = 2q \\ p+q+r = 2r \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = 1 \\ q = 2 \\ r = 3 \end{cases} \quad (\text{答})$$

(2) (1)より

$$a_{n+1} + (n+1)^2 + 2(n+1) + 3 = 2(a_n + n^2 + 2n + 3)$$

であるから, $\{a_n + n^2 + 2n + 3\}$ は初項 $a_1 + 1 + 2 + 3 = 7$, 公比 2 の等比数列であり,

$$a_n + n^2 + 2n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3 \quad (\text{答})$$

4

(1) 直線 AB の方程式は

$$y = \frac{4-1}{2+1}(x+1) + 1 \quad \therefore y = x + 2$$

 $-1 < t < 2$ のとき, $\triangle ABP$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (t+2-t^2) \cdot (2+1) \\ &= \frac{3}{2}(-t^2+t+2) \\ &= \frac{3}{2} \left\{ -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{27}{8} \quad (\text{答})$$

をとる。

(注) 点 P における C の接線が直線 AB に平行のとき $\triangle ABP$ の面積が最大になるという方針でも解けるが, 実際に答案を書いてみると, 根拠説明が意外と長引く。最大最小問題は数式処理する方が入試では得策のようである。

(2) $Q(p, q)$ とおくと, PQ の中点 $\left(\frac{p+t}{2}, \frac{q+t^2}{2}\right)$ は直線 AB 上にあるから,

$$\frac{q+t^2}{2} = \frac{p+t}{2} + 2$$

$$\therefore q = p - t^2 + t + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

 $\overrightarrow{PQ} = (p-t, q-t^2)$ は直線 AB と垂直であるから,

$$1 \cdot (p-t) + 1 \cdot (q-t^2) = 0$$

$$\therefore p+q = t^2+t \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より

$$p = t^2 - 2, \quad q = t + 2$$

 $Q(t^2 - 2, t + 2)$ が C 上にあるとき

$$t + 2 = (t^2 - 2)^2$$

$$t^4 - 4t^2 - t + 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1)(t^2+t-1) = 0$$

 $-1 < t < 2$ より

$$t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{答})$$

(注) 定性的に考えると, $t = -1, 2$ は条件式を満たすはずである。