

$$\boxed{1} \quad \alpha^2 - 4\alpha + t = 0 \text{ より} \\ (\alpha - 2)^2 = 4 - t$$

$\arg \alpha > 0$ より

$$\alpha = 2 + \sqrt{t-4}i \quad (4-t < 0)$$

$|\alpha| = \sqrt{2^2 + (t-4)} = \sqrt{t}$ でくくると

$$\alpha = \sqrt{t} \left(\frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t-4}}{\sqrt{t}} i \right)$$

となるから, $\arg \alpha = \frac{\pi}{6}$ より

$$\frac{2}{\sqrt{t}} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{t-4}}{\sqrt{t}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{t} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{t-4} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore t = \frac{16}{3}, \quad \alpha = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i \quad (\text{答})$$

2 a, b, c について対称であるから, 3 枚のカードを同時に取り出すとしても題意は変わらない。3 枚のカードの取り出し方は

$${}_{3n}C_3 = \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!} = \frac{1}{2}n(3n-1)(3n-2)$$

通りあり, その各場合は同様に確からしい。

$a + b + c$ が 3 の倍数であるのは,

- a, b, c を 3 で割った余りがすべて等しい
- a, b, c を 3 で割った余りが相異なる

のいずれかの場合であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot {}_n C_3 + n^3}{{}_{3n} C_3} &= \frac{\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) + n^3}{\frac{1}{2}n(3n-1)(3n-2)} \\ &= \frac{(n-1)(n-2) + 2n^2}{(3n-1)(3n-2)} \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{(3n-1)(3n-2)} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

であり, $n = 1, 2$ のときも成り立つ。

3

(1) $x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ を変形して

$$x\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1 = 2$$

$$x\sqrt{x^2 + 1} = 1 - x^2 \quad \dots\dots (*)$$

$$x^2(x^2 + 1) = (1 - x^2)^2$$

$$x^2 = 1 - 2x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(*)が成り立つのは

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$

(2) $a_{n+1} = 2a_n + n \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\alpha(n+1) + \beta = 2(\alpha n + \beta) + n$ (α, β は定数)とおくと,

$$(\alpha + 1)n - \alpha + \beta = 0$$

任意の自然数 n に対して成り立つから

$$\alpha + 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad -\alpha + \beta = 0 \quad \therefore \alpha = \beta = -1$$

$$\therefore -(n+1) - 1 = 2(-n-1) + n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① - ②より

$$a_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(a_n + n + 1)$$

$\{a_n + n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 + 1 = 3$, 公比 2 の等比数列であるから,

$$a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1 \quad (\text{答})$$

4

(1) $f_n(-x) = f_n(x)$, $\cos(-x) = \cos x$ であることを考えて,

$$\begin{aligned}
 I_n &= 2 \int_0^1 f_n(x) \cos x \, dx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2 x) \cos x \, dx \\
 &= 2 \left[(n - n^2 x) \sin x \right]_0^{\frac{1}{n}} - 2 \int_0^{\frac{1}{n}} (-n^2) \sin x \, dx \\
 &= 0 + 2n^2 \left[-\cos x \right]_0^{\frac{1}{n}} \\
 &= 2n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \left(1 + \cos \frac{1}{n} \right)}{1 + \cos \frac{1}{n}} \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} \left(1 + \cos \frac{1}{n} \right)} \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \frac{1}{n}} \\
 &= 2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} \\
 &= 1 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$