

1

2つの等式

$$\alpha^2 - 4\alpha + t = 0, \quad \arg \alpha = \frac{\pi}{6}$$

を同時に満たす実数 t と複素数 α を求めよ。ただし, $\arg \alpha$ は α の偏角を表す。

この問題については, 解答用紙の所定の欄に答えだけを書くこと。

(30点)

2 n を自然数とする。1 から $3n$ までの数字が書かれた $3n$ 枚のカードをよく切って、3 枚を順に取り、1 枚目、2 枚目、3 枚目のカードに書かれた数字をそれぞれ a, b, c とする。ただし、取ったカードは戻さない。 $a + b + c$ が 3 の倍数である確率を求めよ。

この問題については、答えだけでなく、答えを導く過程も書くこと。

(40 点)

3

この問題については，解答用紙の所定の欄に答えだけを書くこと。

(1) 等式

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

を満たす実数 x を求めよ。

(2) 条件

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(40 点)

4 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$\begin{cases} |x| \leq \frac{1}{n} \text{ のとき, } f_n(x) = n - n^2|x| \\ |x| > \frac{1}{n} \text{ のとき, } f_n(x) = 0 \end{cases}$$

と定め、

$$I_n = \int_{-1}^1 f_n(x) \cos x \, dx$$

とおく。

- (1) 定積分 I_n を求めよ。
- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

この問題については、答えだけでなく、答えを導く過程も書くこと。

(40 点)