

なぜ $(-1) \times (-1) = 1$ なのか？

$(-1) \times (-1) = 1$ となるのは中学校で習うのだが、なぜそうなるのかはきちんと説明されていないように思われる。よく見かける説明も「なぜそうなるのか」ではなく、その定義を認めて「どのように覚えればよいか」に終始していることが多い。不毛な議論を繰り返さないためにも、きちんとした説明をつけてみよう。

一般に、演算をもつ集合を拡張する場合は、拡張する前の集合での演算法則を踏襲し、矛盾がないように定義しなければならない。正の数の世界における演算法則を負の数にも拡張すれば、必然的に $(-1) \times (-1) = 1$ となってしまうというのが真相である。

正の数においては

$$\text{交換法則： } a + b = b + a, \quad ab = ba$$

$$\text{結合法則： } (a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$$

$$\text{分配法則： } a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc$$

が成り立つので、これらの演算法則を 0 および負の数にも拡張して適用する。

$$1 = 1 \times 1 = (2 - 1) \times 1 = 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 2 + (-1) \times 1$$

より

$$(-1) \times 1 = 1 - 2 = -1,$$

$$1 \times (-1) = (-1) \times 1 = -1$$

であるから、正の数と負の数の積が定義されたことになる。分配法則より

$$0 \times 1 = (1 - 1) \times 1 = 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 1 + (-1) = 0$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \times 1 = (1 - 1) \times (2 - 1) \\ &= 1 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) \times 2 + (-1) \times (-1) \\ &= 2 + (-1) + (-1) \times (1 + 1) + (-1) \times (-1) \\ &= 1 + (-1) \times 1 + (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) \\ &= 1 - 1 - 1 + (-1) \times (-1) \\ &= -1 + (-1) \times (-1) \end{aligned}$$

となり、両辺に 1 を加えて

$$(-1) \times (-1) = 1$$

が成り立つ。以上において、加法性については既に示されているものとした。

積についての結合法則を用いれば、一般の負の数の積についても

$$(-a) \times (-b) = (-1) \times (-1) \times a \times b = ab$$

が成り立つことがわかる。