

# 単調性をもたらす連続性

大塚美紀生

有界閉区間において、連続関数は最大値  $M$  と最小値  $m$  を持ち、値域は  $[m, M]$  となる。このことは、(有界閉区間における一様連続性と)中間値の定理<sup>注1</sup>により証明されることはよく知られている。これに関連して、単調性さえ仮定されていれば、逆に連続性が導かれることを指摘しておきたい。

## 定理 1

(A) 閉区間  $[a, b]$  で定義された関数  $f(x)$  が狭義単調増加<sup>注2</sup>であるとき、

$$\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = [f(a), f(b)] \quad \dots\dots (*)$$

ならば、 $f(x)$  は  $[a, b]$  で連続である。

(B) 閉区間  $[a, b]$  で定義された関数  $f(x)$  が狭義単調減少<sup>注2</sup>であるとき、

$$\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = [f(b), f(a)]$$

ならば、 $f(x)$  は  $[a, b]$  で連続である。

これは期待されるべき結果ではあるが、(論理的には)任意の2点間の関係を表す単調性が連続性をもたらすのは、何やら不思議のように思える。しかしながら、この単調性の仮定がなければ、例えば

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ 2x - 1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

のように、値域は  $[f(0), f(2)]$  でも  $x = 1$  で不連続な関数の例が出てきてしまう。

定理 1 の証明は、整数の場合に

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq n \implies x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$$

を導く議論を実数の世界でまねたものであり、中間値の定理の証明と技巧が似ている。さらに、単調性を連続性に結びつけることが次の定理へと応用できる。

定理 2  $a \leq x \leq b$  で定義された連続関数  $f(x)$  が逆関数  $f^{-1}(x)$  を持てば、 $f^{-1}(x)$  は  $f(x)$  の値域を定義域とする連続関数である。

この定理自体は高校でも習うことになっているが、高校数学の範囲では証明できない。直観的には明らかとも思えるのに(高校の範囲では)うまく説明できないもどかしさを、定理 1 の単調性に基づく議論は見事に解消してくれる。ただ、定理 1 の証明では単調性という実数の全順序が重要な役割を果たしているため、2変数以上の場合には単純に拡張することはできないのは残念である。

### 定理 1 の証明

ここでは, (A)のみを示すことにする。(B)の証明も同様である。

$x_0 \in (a, b)$  とし, 任意の正の実数を  $\varepsilon$  とする。

$f(a) \leq f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \leq f(b)$ <sup>注3</sup> のとき, (\*)より

$$f(x_0) - \varepsilon = f(c), f(x_0) + \varepsilon = f(d)$$

を満たす実数  $c, d (\in [a, b])$  が存在する。 $x_0 \leq c$  とすれば, 狭義単調増加であることより  $f(x_0) \leq f(c)$  となるが,  $f(c) = f(x_0) - \varepsilon < f(x_0)$  に矛盾するから,

$$c < x_0$$

同様に

$$x_0 < d$$

も成り立つ。 $\delta = \min \{x_0 - c, d - x_0\}$  とおくと

$$|x - x_0| < \delta \implies (c \leq) x_0 - \delta < x < x_0 + \delta (\leq d)$$

$$\implies f(x_0) - \varepsilon = f(c) < f(x) < f(d) = f(x_0) + \varepsilon$$
<sup>注4</sup>

$f(x_0) - \varepsilon < f(a)$  のときは  $f(c)$  を  $f(a)$  に置き換えて全く同じ議論が成り立ち,  $f(b) < f(x_0) + \varepsilon$  のときは  $f(d)$  を  $f(b)$  に置き換えて全く同じ議論が成り立つから,  $f(x)$  は  $a < x < b$  で連続である。

$x_0 = a$  のとき,  $f(a) + \varepsilon < f(b)$  なる正の実数  $\varepsilon$ <sup>注3</sup> に対して, (\*)より

$$f(a) + \varepsilon = f(c)$$

を満たす実数  $c (\in [a, b])$  が存在する。

$$a \leq x < c \implies f(a) \leq f(x) < f(c) = f(a) + \varepsilon$$

が成り立つから,  $f(x)$  は  $x = a$  で連続である。

$x_0 = b$  のとき,  $f(a) < f(b) - \varepsilon$  なる正の実数  $\varepsilon$ <sup>注3</sup> に対して, (\*)より

$$f(b) - \varepsilon = f(d)$$

を満たす実数  $d (\in [a, b])$  が存在する。

$$d < x \leq b \implies f(b) \geq f(x) > f(d) = f(b) - \varepsilon$$

が成り立つから,  $f(x)$  は  $x = b$  で連続である。

(証明おわり)

### 定理 2 の証明

1 変数関数の場合, 逆関数の存在条件は増加関数または減少関数になることである。

$f(x)$  は連続であるから, 中間値の定理<sup>注1</sup>より

$$\{f^{-1}(x) \mid x \in [f(a), f(b)]\} = [a, b]$$

または

$$\{f^{-1}(x) \mid x \in [f(b), f(a)]\} = [a, b]$$

が成り立ち, 定理 1 の仮定をすべて満たす。よって,  $f^{-1}(x)$  は連続である。

(証明おわり)

注1 中間値の定理とは、関数  $f(x)$  が  $a \leq x \leq b$  において連続であり、 $f(a) \neq f(b)$  ならば、 $f(a)$  と  $f(b)$  の間にある任意の実数  $\mu$  に対して

$$f(c) = \mu, \quad a < c < b$$

となる実数  $c$  が存在するというものである。

高校では証明されないので、ここで確認することにしよう。といっても、一般的に知られている証明である。 $f(a) < f(b)$  の場合を証明するが、 $f(b) < f(a)$  の場合も同様である。

$f(a) < \mu < f(b)$  に対して、集合

$$S = \{x \mid f(x) \leq \mu, \quad a \leq x \leq b\}$$

を定め、 $S$  の上限を  $c$  とする。このとき

$$x_n \in S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

を満たす数列  $\{x_n\}$  が存在するが、 $f(x_n) \leq \mu$  であるから、連続性より

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \mu$$

ここで、 $f(c) < \mu$  であるとすれば、 $f(x)$  は  $x = c$  で連続であるから、 $\varepsilon = \frac{\mu - f(c)}{2}$  に対してある正の実数  $\delta$  が存在して

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon \implies f(x) < f(c) + \varepsilon < \mu$$

となる。したがって、

$$c < x < c + \delta \implies x \in S$$

となって、 $c$  が  $S$  の上限であることに反する。ゆえに、

$$f(c) = \mu$$

である。

(証明おわり)

注2 「単調増加」、「単調減少」の用語については2通りの流儀がある。

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は単調増加}$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は狭義単調増加}$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は単調減少}$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は狭義単調減少}$$

とする流儀と

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は単調非減少}$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は単調増加}$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は単調非増加}$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は単調減少}$$

とする流儀である。本稿では「狭義単調増加」または「狭義単調減少」としているの  
で、どちらの流儀の人にも誤解はないだろう。高校までの数学では、混乱を避ける  
ためなのか、「単調増加」、「単調減少」という用語は教科書に出てこない。

注3 正の実数  $\varepsilon$  は任意にとるといっても、「任意の小さな正の実数に対して」という

含みがあるので，はじめから「 $\varepsilon > 0$  は十分小さい」と仮定しても差し支えない。そもそも，大きな  $\varepsilon$  に対して適当に  $\delta > 0$  がとれるのは明らかである。

注 4  $\varepsilon - \delta$  論法は高校までの数学では習わないが，説明をわかりやすくするために本稿では敢えて用いている。大学受験のための学習で出てくる「予選決勝法」(一つ以外を固定して一つずつ動かす手法)と同じテクニックなので，親しみが持てるであろう。 $\varepsilon - \delta$  論法が難しいなどという意見は全く見当違いである。

#### 参考文献

- [1] 小平邦彦，解析入門，岩波書店(2003).
- [2] 垣田高夫・笠原皓司・廣瀬健・森毅，微分積分，日本評論社(1993).
- [3] 森田紀一，位相空間論，岩波全書(1981).