

1

(1) $1 \leq r \leq n-1$ を満たす自然数 r に対し,

$$\begin{aligned}
{}_n C_r &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-r+r) \cdot (n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} \\
&= {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}
\end{aligned}$$

(証明おわり)

(2) $n=1$ のとき

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} {}_{1-r} C_r = {}_1 C_0 = 1 = F_2$$

 $n=2$ のとき

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor} {}_{2-r} C_r = {}_2 C_0 + {}_1 C_1 = 1 + 1 = F_1 + F_2 = F_3$$

(証明おわり)

(3) $n=k-1$, k のとき (★) が成り立つとして, (1)を用いると, k が偶数のとき

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \frac{k}{2} = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

であり,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} {}_{k+1-r} C_r &= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+1-r} C_r \\
&= {}_k C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} ({}_{k-r} C_r + {}_{k-r} C_{r-1}) \quad ({}_{k+1} C_0 = {}_k C_0 = 1) \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} {}_{k-r} C_r + \sum_{s=0}^{\frac{k}{2}-1} {}_{k-1-s} C_s \\
&= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} {}_{k-r} C_r + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} {}_{k-1-s} C_s \\
&= F_{k+1} + F_k \\
&= F_{k+2}
\end{aligned}$$

k が奇数のとき

$$\left[\frac{k+1}{2} \right] = \frac{k+1}{2} = \left[\frac{k}{2} \right] + 1$$

であり,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+1}{2} \right]} k_{+1-r} C_r &= k_{+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} k_{+1-r} C_r \\ &= k_{+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} (k-r C_r + k-r C_{r-1}) + \frac{k+1}{2} C_{\frac{k+1}{2}} \\ &= k C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} k-r C_r + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} k-r C_{r-1} + \frac{k+1}{2} C_{\frac{k+1}{2}} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{k-1}{2}} k-r C_r + \sum_{s=0}^{\frac{k-1}{2}} k-1-s C_s \\ &= \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2} \right]} k-r C_r + \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2} \right]} k-1-s C_s \\ &= F_{k+1} + F_k \\ &= F_{k+2} \end{aligned}$$

であるから, $n = k + 1$ のときも (★) が成り立つ。

(2)より $n = 1, 2$ のとき (★) は成り立つから, 数学的帰納法(の論理)により, すべての自然数 n に対し (★) が成り立つことが示された。 (おわり)

2

- (1) 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点が A だけであるのは、
OA が青, OB, OC, OD, AB, AD が赤
の場合であり、青の線分のみで到達できる 1 点が B, C, D の各場合も同様であるから、求める確率は

$$\frac{2^2 \times 4}{2^8} = \frac{1}{16} \quad (\text{答})$$

- (2) 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点が A, B, C の 3 つであるのは、

AD, CD, OD が赤

であり、かつ

- (i) OA, OB, OC が青
- (ii) OA, OB が青, OC が赤, BC が青
- (iii) OA, OC が青, OB が赤, AB と BC の少なくとも一方が青
- (iv) OA が赤, OB, OC が青, AB が青
- (v) OA, OB, OC のいずれか 1 つだけが青, AB, BC がともに青

のいずれかの場合である。3 点が {B, C, D}, {C, D, A}, {D, A, B} の各場合も同様であるから、求める確率は

$$\frac{(2^2 + 2 + 3 + 2 + 3) \times 4}{2^8} = \frac{7}{32} \quad (\text{答})$$

- (3) 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点が A, B, C の 3 つであるとき、点 O から出発して赤の線分のみを通り到達できる点が A, B, C, D のうちの 3 点であるのは、AB, BC, OB が青に塗られる場合であるから、求める条件つき確率は

$$\frac{1 + 1 + 0 + 1 + 1}{2^2 + 2 + 3 + 2 + 3} = \frac{2}{7} \quad (\text{答})$$

3

(1) $f(x) = x^{x^2}$ の両辺自然対数をとって

$$\log f(x) = x^2 \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x) = f(x)(2x \log x + x) = x^{x^2+1}(2 \log x + 1) \quad (\text{答})$$

さらに x で微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x)(2x \log x + x) + f(x) \left(2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 \right) \\ &= f(x)(2x \log x + x)^2 + f(x)(2 \log x + 3) \\ &= x^{x^2} \{ x^2(2 \log x + 1)^2 + 2 \log x + 3 \} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $x > 0$ において

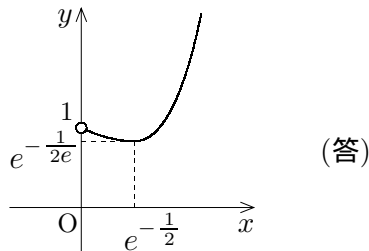
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2 \log x + 1 > 0 \\ &\iff \log x > -\frac{1}{2} = \log e^{-\frac{1}{2}} \\ &\iff x > e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であるから, $f(x)$ の増減は

x	(0)	$e^{-\frac{1}{2}}$	(∞)	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	(1)	\	極小	/

ここで, $\lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x = 0$ より $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ であり, 極小値は

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{2e}}$$

であることも考えて, 曲線 $y = f(x)$ の概形は(3) 方程式 $f(x) = k$ が異なる 2 つの実数解をもつのは, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ が 2 つの共有点をもつときであるから, (2) の図より, k のとり得る値の範囲は

$$e^{-\frac{1}{2e}} < k < 1 \quad (\text{答})$$