

1 次の条件によって定まる数列 $\{F_n\}$ を考える .

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$\frac{n}{2}$ を越えない最大の整数を $\left[\frac{n}{2} \right]$ と表すとき ,

$$F_{n+1} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} n-r C_r \quad (\star)$$

が成り立つことを以下の手順により示せ .

(1) $1 \leq r \leq n-1$ を満たす自然数 r に対し ,

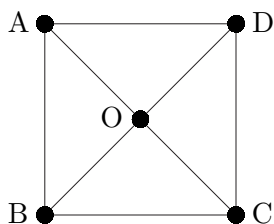
$$n C_r = n-1 C_r + n-1 C_{r-1}$$

が成り立つことを示せ .

(2) (\star) が $n = 1, 2$ に対して成り立つことを示せ .

(3) すべての自然数 n に対し , (\star) が成り立つことを数学的帰納法により示せ .

- 2 5つの点 O , A , B , C , D とそれらをつなぐ 8 つの線分からなる下図のような図形がある .



この図形の 8 つの線分をそれぞれ赤か青に塗る方法を 1 つずつ記した合計 2^8 枚のカード (重複なし) を用意し , その中から 1 枚を無作為に引くことを考える . 以下の問いに答えよ .

- (1) A , B , C , D の 4 点のうち , 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点の数が 1 つであるような塗り方のカードを引く確率を求めよ .
- (2) A , B , C , D の 4 点のうち , 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点の数が 3 つであるような塗り方のカードを引く確率を求めよ .
- (3) 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点は A , B , C であるカードを引いたとする . このとき , A , B , C , D の 4 点のうち , 点 O から出発して赤の線分のみを通り到達できる点の数が 3 つである条件つき確率を求めよ .

3 $x > 0$ において定義された関数 $f(x) = x^{(x^2)}$ を考える．以下の問いに答えよ．

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の概形を，極限值 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x)$ に注意して描け．
ただし， $x \rightarrow +0$ のとき $x \log x \rightarrow 0$ となることは用いてよい．また，曲線の変曲点の座標を求める必要はない．
- (3) k を実数とする． x についての方程式 $f(x) = k$ が異なる 2 つの実数解 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ を持つとする．このとき k が取りうる値の範囲を求めよ．