

1

(1)  $1 \leq r \leq n-1$  を満たす自然数  $r$  に対し,

$$\begin{aligned}
 {}_n C_r &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
 &= \frac{(n-r+r) \cdot (n-1)!}{r!(n-r)!} \\
 &= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} \\
 &= {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}
 \end{aligned}$$

(証明おわり)

(2)  $n=1$  のとき

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} {}_{1-r} C_r = {}_1 C_0 = 1 = F_2$$

 $n=2$  のとき

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor} {}_{2-r} C_r = {}_2 C_0 + {}_1 C_1 = 1 + 1 = F_1 + F_2 = F_3$$

(証明おわり)

(3)  $n=k-1$ ,  $k$  のとき (★) が成り立つとして, (1)を用いると,  $k$  が偶数のとき

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \frac{k}{2} = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

であり,

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} {}_{k+1-r} C_r &= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+1-r} C_r \\
 &= {}_k C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} ({}_{k-r} C_r + {}_{k-r} C_{r-1}) \quad ({}_{k+1} C_0 = {}_k C_0 = 1) \\
 &= \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} {}_{k-r} C_r + \sum_{s=0}^{\frac{k}{2}-1} {}_{k-1-s} C_s \\
 &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} {}_{k-r} C_r + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} {}_{k-1-s} C_s \\
 &= F_{k+1} + F_k \\
 &= F_{k+2}
 \end{aligned}$$

$k$  が奇数のとき

$$\left[ \frac{k+1}{2} \right] = \frac{k+1}{2} = \left[ \frac{k}{2} \right] + 1$$

であり,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\left[ \frac{k+1}{2} \right]} k_{+1-r} C_r &= k_{+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} k_{+1-r} C_r \\ &= k_{+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} (k-r C_r + k-r C_{r-1}) + \frac{k+1}{2} C_{\frac{k+1}{2}} \\ &= k C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} k-r C_r + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} k-r C_{r-1} + \frac{k-1}{2} C_{\frac{k-1}{2}} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{k-1}{2}} k-r C_r + \sum_{s=0}^{\frac{k-1}{2}} k-1-s C_s \\ &= \sum_{r=0}^{\left[ \frac{k}{2} \right]} k-r C_r + \sum_{s=0}^{\left[ \frac{k-1}{2} \right]} k-1-s C_s \\ &= F_{k+1} + F_k \\ &= F_{k+2} \end{aligned}$$

であるから,  $n = k + 1$  のときも (★) が成り立つ。

(2)より  $n = 1, 2$  のとき (★) は成り立つから, 数学的帰納法(の論理)により, すべての自然数  $n$  に対し (★) が成り立つことが示された。 (おわり)

2

- (1) 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点が A だけであるのは、  
OA が青, OB, OC, OD, AB, AD が赤  
の場合であり、青の線分のみで到達できる 1 点が B, C, D の各場合も同様であるから、求める確率は

$$\frac{2^2 \times 4}{2^8} = \frac{1}{16} \quad (\text{答})$$

- (2) 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点が A, B, C の 3 つであるのは、

AD, CD, OD が赤

であり、かつ

- (i) OA, OB, OC が青
- (ii) OA, OB が青, OC が赤, BC が青
- (iii) OA, OC が青, OB が赤, AB と BC の少なくとも一方が青
- (iv) OA が赤, OB, OC が青, AB が青
- (v) OA, OB, OC のいずれか 1 つだけが青, AB, BC がともに青のいずれかの場合である。3 点が {B, C, D}, {C, D, A}, {D, A, B} の各場合も同様であるから、求める確率は

$$\frac{(2^2 + 2 + 3 + 2 + 3) \times 4}{2^8} = \frac{7}{32} \quad (\text{答})$$

3

(1)  $xy$  平面上で

$$O(0, 0), A(1, 0), B(\cos \theta, \sin \theta) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

として考えても一般性を失わず,

$$\angle AOP = \alpha \quad (0 < \alpha < \theta)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} (\cos \theta, \sin \theta) + \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \cos \theta, 0 \right) \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \overrightarrow{OB} + \frac{\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha}{\sin \theta} \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \overrightarrow{OA} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{t}{1+t} \left( \frac{1+t}{t} \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \overrightarrow{OA} \right) + \frac{1}{1+t} (1+t) \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表される。

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1+t}{t} \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OY} = (1+t) \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \overrightarrow{OB} \quad \dots\dots (*)$$

とおけば

$$\overrightarrow{OP} = \frac{t \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}}{1+t}$$

であり, 半直線  $OA$  上の点  $X$  と半直線  $OB$  上の点  $Y$  がただ 1 組に定まり, 直線  $\ell$  がただ 1 つとれる。 (証明おわり)(2) (\*) より,  $\triangle OXY$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot OX \cdot OY \cdot \sin \theta = \frac{(1+t)^2}{2t} \cdot \frac{\sin \alpha \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \quad (\text{答})$$

 $P$  を動かしたとき ( $\alpha$  を  $0 < \alpha < \theta$  で動かしたとき)

$$S \text{ が最大} \iff \sin \alpha \sin(\theta - \alpha) \text{ が最大}$$

であり, 加法定理より

$$\sin \alpha \sin(\theta - \alpha) = \frac{1}{2} \{ \cos(2\alpha - \theta) - \cos \theta \}$$

であるから,  $S$  が最大となるための条件は

$$2\alpha - \theta = 0 \quad \therefore \angle AOP = \frac{1}{2} \angle AOB \quad (\text{答})$$