

1 次の条件によって定まる数列 $\{F_n\}$ を考える .

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$\frac{n}{2}$ を越えない最大の整数を $\left[\frac{n}{2} \right]$ と表すとき ,

$$F_{n+1} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} n-r C_r \quad (\star)$$

が成り立つことを以下の手順により示せ .

(1) $1 \leq r \leq n-1$ を満たす自然数 r に対し ,

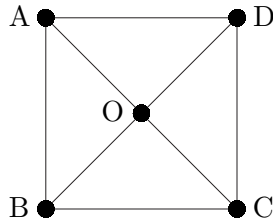
$$n C_r = n-1 C_r + n-1 C_{r-1}$$

が成り立つことを示せ .

(2) (\star) が $n = 1, 2$ に対して成り立つことを示せ .

(3) すべての自然数 n に対し , (\star) が成り立つことを数学的帰納法により示せ .

- 2 5つの点 O, A, B, C, D とそれらをつなぐ 8 つの線分からなる下図のような図形がある .



この図形の 8 つの線分をそれぞれ赤か青に塗る方法を 1 つずつ記した合計 2^8 枚のカード (重複なし) を用意し , その中から 1 枚を無作為に引くことを考える . 以下の問いに答えよ .

- (1) A, B, C, D の 4 点のうち , 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点の数が 1 つであるような塗り方のカードを引く確率を求めよ .
- (2) A, B, C, D の 4 点のうち , 点 O から出発して青の線分のみを通り到達できる点の数が 3 つであるような塗り方のカードを引く確率を求めよ .

3 平面上に点 O を中心とする半径 1 の円をとり，その円上に 2 点 A, B をとる．弧 AB の中心角 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする．点 P は弧 AB 上にあり A, B とは異なるものとし，点 P を通る直線 ℓ は， O を端点とする半直線 OA, OB とそれぞれ点 X, Y で交わるものとする．また， t を正の実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 与えられた点 P に対して， $PX : PY = 1 : t$ が成り立つような直線 ℓ がただ 1 つとれることを示せ．

(2) ℓ を $PX : PY = 1 : t$ が成り立つようにとったとき， t, θ ，および弧 AP の中心角 α を用いて $\triangle OXY$ の面積 S を表せ．また，

$$2 \sin(\theta - \alpha) \sin \alpha = \cos(\theta - 2\alpha) - \cos \theta$$

に注意して， P を動かしたときに S が最大となるための P に関する条件を求めよ．