

1 (多項式の定義と演算)

- (1) 多項式 $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4xy - 5x^2 + 6y^2$ を同類項についてまとめ, x について降べきの順に整理せよ。
- (2) $(a+b)(a+c) + (b+a)(b+c) + abc$ を次数が最も低い文字について整理せよ。
- (3) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 - 2(x^3 - 7x - 8) + 3(3x^3 - 4x^2 + x - 5)$ を計算せよ。

2 (式の展開)

次の式を展開せよ。

- (1) $(2x + 3y)(4x + 5y)$
- (2) $(x - 3)(x^3 - 3x^2 + 4x - 2)$
- (3) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$
- (4) $(2a - 3b)^3$
- (5) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- (6) $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
- (7) $(a - 1)(a - 2)(a - 4)(a - 5)$

3 (公式で因数分解)

次の式を因数分解せよ。

- (1) $4x^2 - 16y^2$
- (2) $4a^2 + 12ab + 9b^2$
- (3) $27a^3 - 125b^3$
- (4) $a^2 + 5ab + 6b^2$
- (5) $6x^2 + x - 15$

4 (技巧的な因数分解)

次の式を因数分解せよ。

- (1) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + 15$
- (2) $x^4 - 3x^2 + 1$
- (3) $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

5 (多変数多項式の因数分解)

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 4xy + 3y^2 + x + 5y - 2$

(2) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

(3) $(a + b)(b + c)(c + a) + abc$

6 (恒等式)

(1) 等式 $3x^3 + 2x^2 + x = ax(x - 1)(x - 2) + bx(x - 1) + cx$ が x についての恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ。(2) 等式 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x - 1)^3 + a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$ が x についての恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ。(3) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3 = (x + ay + b)(2x + cy + d)$ が x, y についての恒等式となるように整数定数 a, b, c, d の値を定めよ。(4) $f(x + 1) = 2f(x) + x^2$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

7 (方程式・不等式と恒等式)

- (1) 3次方程式 $x^3 - x^2 - x + k = 0$ が重解をもつような定数 k の値と, そのときの重解を求めよ。
- (2) x についての2次不等式 $ax^2 + bx + 1 \leq 0$ の解が $x \leq -\frac{1}{2}$ または $x \geq 3$ となるような a, b の値を求めよ。
- (3) $x^2 - x - 1$ を1次式の積に分解せよ。

8 (対称式, 交代式)

- (1) 2次方程式 $x^2 - 7x + 4 = 0$ の2解を α, β とするとき, 次の各値を求めよ。
- | | | |
|---------------------------|--------------------------|--|
| (i) $\alpha + \beta$ | (ii) $\alpha\beta$ | (iii) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ |
| (iv) $\alpha^3 + \beta^3$ | (v) $\alpha^4 + \beta^4$ | (vi) $\alpha^3 - \beta^3$ |
- (2) $x + \frac{1}{x} = a$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ および $x^3 + \frac{1}{x^3}$ をそれぞれ a の式で表せ。

9 (多項式の除法)

- (1) $2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2$ を $x^2 + 2x + 3$ で割ったときの商と余りを求めよ。
- (2) $ax^3 + bx^2 - 2$ が $(x + 1)^2$ で割り切れるような定数 a, b の値を求めよ。
- (3) $x = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき, $2x^4 - 8x^3 - 21x^2 - x + 2$ の値を求めよ。

10 (剰余の定理, 因数定理)

- (1) 多項式 $P(x)$ を $x - \alpha$ で割った余りは $P(\alpha)$ であることを示せ。
- (2) 方程式 $2x^3 + x^2 - 10x + 6 = 0$ を解け。
- (3) 多項式 $P(x)$ を $x - 3$ で割ると 3 余り, $x - 5$ で割ると -21 余るといふ。このとき, 多項式 $P(x)$ を $(x - 3)(x - 5)$ で割った余りを求めよ。

□11 (有理数係数と無理数解, 実数係数と虚数解)

(1) $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ が 3 次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の解となるような有理数 a, b を定め, その方程式の解をすべて求めよ。

(2) 実数係数の 3 次方程式

$$2x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$$

が $1 + i$ を解にもつとき, a, b と残りの解を求めよ。

□12 (二項定理)

(1) $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9$ の展開式における定数項, x^3 の係数および x^4 の係数を求めよ。

(2) 自然数 n に対して,

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$

が成り立つことを示せ。

(3) 自然数 n に対して, 3^n を 4 で割った余りを n を用いて表せ。

① 確認： $2x^3y^4$ のように数字や文字を掛け合わせた式を単項式という。単項式を定数と変数の積とみるとき定数の部分を係数といい、変数部分の掛け合わせた文字の個数を次数という。特にことわらないときは、文字の部分すべてを変数部分とする。

例えば、 $2x^3y^4$ については

x^3y^4 の係数は 2, y^4 の係数は $2x^3$, 次数は 7, x についての次数は 3

いくつかの単項式の和で表される式を多項式といい、個々の単項式を(多項式の)項という。単項式もまた項が一つの多項式である。多項式は整式ともいうが、有理数係数多項式や整数値多項式など、整式という言葉が使えない場面もある。あくまでも、正式な用語は「多項式 (polynomial)」である。

多項式において文字部分が同じである項を同類項といい、同類項をすべてひとつにまとめた上で各係数がすべて一致するときに 2 つの多項式は等しいという。また、多項式 $P(x)$ の n 次の項や n 次の係数という場合も、同類項をまとめて整理した上での項や係数を指す。同類項をまとめて整理する際、次数の高い方から順に並べて整理することを降べきの順に整理するといひ、次数の低い方から順に並べて整理することを昇べきの順に整理するといひ。同類項をまとめて整理した多項式において、各項の次数の中で最大のものを多項式の次数という。

多項式の和, 差, 積は同類項ごとに行なわれ, 積は②で式の展開として扱う。

解答：

$$(1) \quad 2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4xy - 5x^2 + 6y^2 = 2x^2 - 5x^2 + 5xy - 4xy + 2y^2 + 6y^2 \\ = -3x^2 + yx + 8y^2 \quad (\text{答})$$

(注) 「 x で整理する」という場合、 x が変数、 x 以外を定数として表現するのが原則。

(2) $(a+b)(a+c) + (b+a)(b+c) + abc$ は a および b について 2 次、 c について 1 次であるから、 c について整理すると、

$$(a+b)(a+c) + (b+a)(b+c) + abc \\ = (a+b)a + (a+b)c + (b+a)b + (b+a)c + abc \\ = (a+b)c + (b+a)c + abc + (a+b)a + (b+a)b \\ = (a+b+b+a+ab)c + a^2 + ba + b^2 + ab \\ = (ab + 2a + 2b)c + a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{答})$$

(注) 一つの文字について整理すると言えば、一般には降べきの順で整理することを指す。

$$(3) \quad x^3 + 2x^2 + 3x + 4 - 2(x^3 - 7x - 8) + 3(3x^3 - 4x^2 + x - 5) \\ = (1 - 2 + 9)x^3 + (2 + 0 - 12)x^2 + (3 + 14 + 3)x + 4 + 16 - 15 \\ = 8x^3 - 10x^2 + 20x + 5 \quad (\text{答})$$

2 確認：数について

$$\text{交換法則： } A + B = B + A, \quad AB = BA$$

$$\text{結合法則： } (A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC)$$

$$\text{分配法則： } A(B + C) = AB + AC$$

が成り立つが，多項式の演算についてもこの法則が成り立つように定義する方が合理的である。そこで，多項式の積を，各多項式から一つずつ項を選んで掛け合わせ，項の取り出し方すべてについて足し合わせることで得られる多項式と定める。いくつかの多項式の積を計算して，一つが多項式に直すことを展開という。

上の計算法則を組み合わせることでどのような多項式の積も展開できるが，特徴的な展開式を公式として覚えておくことにより，計算効率を上げることができる。その公式全般を乗法公式といい，主に次のようなものがある：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (\text{複号同順})$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

また，複数の文字を含む場合は一つの文字について整理し，繁雑な式の場合は適当な式をひとまとめにするなど，見通し良く計算する工夫も心掛けるべきである。

解答：

$$(1) \quad (2x + 3y)(4x + 5y) = 8x^2 + 22xy + 15y^2 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad (x - 3)(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x \\ - 3x^3 + 9x^2 - 12x + 6 \\ = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6 \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4 \quad (\text{答})$$

$$(4) \quad (2a - 3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a(3b)^2 - (3b)^3 \\ = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 \quad (\text{答})$$

$$(5) \quad (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 2^3 = x^3 - 8 \quad (\text{答})$$

$$(6) \quad (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = x^4 + x^2y^2 + y^4 \quad (\text{答})$$

$$(7) \quad (a - 1)(a - 2)(a - 4)(a - 5) = (a - 1)(a - 5)(a - 2)(a - 4) \\ = (a^2 - 6a + 5)(a^2 - 6a + 8) \\ = (a^2 - 6a)^2 + (5 + 8)(a^2 - 6a) + 5 \times 8 \\ = (a^4 - 12a^3 + 36a^2) + 13(a^2 - 6a) + 40 \\ = a^4 - 12a^3 + 49a^2 - 78a + 40 \quad (\text{答})$$

3 確認：いくつかの多項式の積で表される多項式 $P(x)$ に対して，積を作っている各式を $P(x)$ の因数という。広い意味では定数でも因数と呼ぶこともあるが，割り算ができるための条件(→ 9)との関係で，高校では1次以上の多項式に限って因数を考えることになっている。

多項式を(1次以上の)因数の積の形に表すことを因数分解するという。特にことわりがなければ，整数係数の範囲で因数分解する。因数分解の手順は

- 1° 性格の似た項どうしを集める，または最も次数の低い文字について整理することで，式の構造を見やすくする。
- 2° 共通因数があれば，共通因数でくくる。
- 3° 乗法公式を用いる。
- 4° 以上の作業をそれ以上分解できなくなるまでくり返す。

まだ因数分解できる多項式を可約な多項式といい，それ以上因数分解できない多項式を既約な多項式という。可約であるか既約であるかは，どの数の範囲で考えているかに依存する。

本問では乗法公式がすぐに使える場合を扱うが，公式

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

を用いる(4)は，単純に「公式より」というわけにはいかない。2次係数 ac および定数項 bd に注目して (a, b, c, d) の候補を出したあと，

$$\begin{array}{ccc} a & \times & b & \rightarrow & bd \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad + bc \end{array}$$

のような図式をかいて，1次係数と合致するものを探すとよい。

解答：

(1) $4x^2 - 16y^2 = 4\{x^2 - (2y)^2\} = 4(x + 2y)(x - 2y)$ (答)

(2) $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2 = (2a + 3b)^2$ (答)

(3) $27a^3 - 125b^3 = (3a)^3 - (5b)^3 = (3a - 5b)(9a^2 + 15ab + 25b^2)$ (答)

(4) 積が6，和が5である組合せは2と3であるとわかるから，

$$a^2 + 5ab + 6b^2 = (a + 2b)(a + 3b)$$
 (答)

(5) x^2 の係数が6，定数項が-15であることから

$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & -3 & \rightarrow & -9 \\ 3 & & 5 & \rightarrow & 10 \\ \hline 6 & & -15 & & +1 \end{array}$$

図式を読んで

$$6x^2 + x - 15 = (2x - 3)(3x + 5)$$
 (答)

4 確認：ここでは 4 次式の処理に関する 3 つの技巧を確認する。

(1) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ をそのまま 4 次式として扱うのは大変なので、

2 (7) で考えたように、適当な 2 次式をひとまとめにすることで処理する。

(2) $x^4 - 3x^2 + 1$ のように、2 次式に x^2 を代入してできる 4 次式を複 2 次式という。複 2 次式の中には、(1) の発想で

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 &= (x^2)^2 - 13x^2 + 36 \\ &= (x^2 - 4)(x^2 - 9) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

と因数分解できるものもあるが、 $t^2 - 3t + 1$ が(整数係数の範囲で)因数分解できない以上、 $x^4 - 3x^2 + 1$ には通用しない。そこで、 $x^4 + 1 = (x^2)^2 + 1^2$ に注目して

$$(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \quad \text{または} \quad (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$

を持ち出し、平方の差の形を作る。

(3) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ のように係数が左右対称な多項式を相反多項式そうはんという。偶数 $2n$ 次の相反多項式は、 x^n で割ると x と $\frac{1}{x}$ について対称となるので、対称式の性質(→ 8) から $x + \frac{1}{x}$ で表されることになる。そこで、 $x + \frac{1}{x}$ で整理して(因数分解も済ませて)おいてから最後に多項式に戻す。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + 15 &= (x-1)(x-7)(x-3)(x-5) + 15 \\ &= (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) + 15 \\ &= (x^2 - 8x)^2 + 22(x^2 - 8x) + 120 \\ &= (x^2 - 8x + 12)(x^2 - 8x + 10) \\ &= (x-2)(x-6)(x^2 - 8x + 10) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad x^4 - 3x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 - x^2 = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1 &= x^2 \left(x^2 + 4x + 5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 5 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 5 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 3 \right) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

5 確認：(因数分解に限らず)多変数の式を処理するには「一変数の処理をくり返す」ことがポイントであるが、特に「次数の最も低い文字について整理する」ことを覚えておくべきである。高次式とみるより低次式と見る方が話が単純なのである。

(1)については、6(3)の解き方でもよい。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 + 4xy + 3y^2 + x + 5y - 2 &= x^2 + (4y + 1)x + 3y^2 + 5y - 2 \\ &= x^2 + (4y + 1)x + (3y - 1)(y + 2) \\ &= (x + 3y - 1)(x + y + 2) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 &= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3) \\ &\quad + (b - c)^3 \\ &= (3c - 3b)a^2 + (3b^2 - 3c^2)a - b^3 + c^3 + (b - c)^3 \\ &= -3(b - c)a^2 + 3(b + c)(b - c)a - 3bc(b - c) \\ &= -3(b - c)\{a^2 - (b + c)a + bc\} \\ &= -3(b - c)(a - b)(a - c) \\ &= 3(a - b)(b - c)(c - a) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (a + b)(b + c)(c + a) + abc &= (b + c)\{a^2 + (b + c)a + bc\} + abc \\ &= (b + c)a^2 + \{(b + c)^2 + bc\}a + bc(b + c) \\ &= \{a + (b + c)\}\{(b + c)a + bc\} \\ &= (a + b + c)(ab + bc + ca) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad b + c \quad \rightarrow \quad (b + c)^2 \\ b + c \quad \times \quad bc \quad \rightarrow \quad bc \\ \hline b + c \quad bc(b + c) \quad (b + c)^2 + bc \end{array}$$

〔6〕 確認：文字式で表された等式が，その文字(変数)にどのような値を代入しても常に(恒に)成り立つとき，その等式をその文字(変数)についての恒等式という。これまでに出てきた式の展開や因数分解のように，式の変形によって導かれる等式はすべて恒等式である。〔9〕において多項式の除法を表す式 $A = BQ + R$ も恒等式である。

等式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

が x についての恒等式であるとすれば， x に $0, 1, -1$ を代入しても成り立つことから

$$a = b = c = 0$$

が導かれるが，一般的に

0 に恒等的に等しい多項式のすべての係数は 0 である

ことが成り立つ。言い換えると，

同類項の係数がすべて同じでない限り恒等式でない

ことになる。しかし，多項式についてのこの性質を証明するには「ファンデルモンドの行列式」という大学の数学(もしくはそれと同等)の知識を要するため，高校の範囲では証明なしに認めることになっている。それに対して，三角関数の恒等式

$$a \sin \theta + b \cos \theta = 0 \iff a = b = 0$$

などその他の恒等式については，(上のような数値代入法などによる)証明を要することになっている。1 変数多項式の場合は，複素数の範囲では 1 次式の積に分解できるので高校の範囲でも証明できそうだが，1 次式の積に分解できることの証明自体が高校の範囲ではできない。何を習って何を習っていないか，何が認められて何が認められないか，しっかり区別してきちんを整理しておこう。

恒等式の条件を求める(係数を決定する)解法は，主に係数比較法と数値代入法の 2 つがある。係数比較法とは，両辺の式を展開・整理して係数がすべて一致する条件を連立方程式として解く方法で，必要十分で解けるのが利点である(が，多項式の場合にしか使えないのが欠点である)。数値代入法とは，いくつかの数値を代入して係数についての必要条件を導く方法で，一般の関数式に適用できるのがよい。ただ，数値代入法では充分性のチェックが面倒になることが多いので，多項式に用いる場合には，際立った特徴がある場合に限る方がよい。

式変形されたものはすべて恒等式であることを考えると，式変形の技巧についても注意しておきたい。(2)では $x = (x - 1) + 1$ により $x - 1$ を主役にする見方，(3)では 2 次の部分だけを分けて比較するという考え方をそれぞれ確認する。

(4)のように恒等式を満たす多項式を決定する問題では，まず次数を求めてから，

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

とにおいて係数を比べる。両辺の次数をを単純に比較するだけでは次数が決定できないときは，次数を文字において一部の項だけ取り出して係数比較する。

解答：

(1) $3x^3 + 2x^2 + x = ax(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx$ が x の恒等式であることは

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c$$

が x の恒等式であることと同値である。右辺を展開して

$$3x^2 + 2x + 1 = ax^2 + (-3a + b)x + 2a - b + c$$

係数を比べると

$$\begin{cases} 3 = a \\ 2 = -3a + b \\ 1 = 2a - b + c \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 3 \\ b = 11 \\ c = 6 \end{cases} \quad (\text{答})$$

(注) 係数比較法で求めたが、数値代入法で求めてもよい。

(2) $x = (x-1) + 1$ より

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 3x + 4 &= (x-1+1)^3 + 2(x-1+1)^2 + 3(x-1+1) + 4 \\ &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 \\ &\quad + 2(x-1)^2 + 4(x-1) + 2 \\ &\quad + 3(x-1) + 3 + 4 \\ &= (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 10(x-1) + 10 \\ \therefore a &= 5, \quad b = 10, \quad c = 10 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 恒等式 $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3 = (x + ay + b)(2x + cy + d)$ において 2 次の項だけ取り出すと、新たな恒等式

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = (x + ay)(2x + cy) = 2x^2 + (2a + c)xy + acy^2$$

が得られる。係数を比べると

$$\begin{cases} 2a + c = 3 \\ ac = -2 \end{cases} \quad \therefore (a, c) = (2, -1), \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$$

a は整数であるから

$$a = 2, \quad c = -1$$

これらの値を代入して、改めて最初の恒等式を考えると

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3 &= (x + 2y + b)(2x - y + d) \\ &= 2x^2 + 3xy - 2y^2 + (2b + d)x + (-b + 2d)y + bd \end{aligned}$$

係数を比べると

$$\begin{cases} 2b + d = 7 \\ -b + 2d = -1 \\ bd = 3 \end{cases} \quad \therefore b = 3, \quad d = 1$$

以上より、求める定数は

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = -1, \quad d = 1 \quad (\text{答})$$

(注) $a = 2, c = -1$ を求める場面では、因数分解 $2x^2 + 3xy - 2y^2 = (x + 2y)(2x - y)$ を行なったことになるが、値の一意性の吟味も暗に要求されている。

(4) $f(x)$ の最高次の項を ax^n ($a \neq 0$) とすると,

$$f(x+1) - 2f(x) = a(x+1)^n + \cdots - 2(ax^n + \cdots) = -ax^n + \cdots$$

は n 次式であり, 仮定より

$$f(x+1) - 2f(x) = x^2$$

であるから, $f(x)$ は 2 次式である。そこで, あらためて

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおいて $f(x+1) = 2f(x) + x^2$ に代入すると,

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = 2(ax^2 + bx + c) + x^2$$

$$\therefore ax^2 + (2a+b)x + a+b+c = (2a+1)x^2 + 2bx + 2c$$

係数を比べると

$$\begin{cases} a = 2a + 1 \\ 2a + b = 2b \\ a + b + c = 2c \end{cases}$$

$$\therefore a = -1, b = -2, c = -3$$

よって, 求める多項式 $f(x)$ は

$$f(x) = -x^2 - 2x - 3 \quad (\text{答})$$

7 確認：多項式の恒等式は，(定数倍を除いて)式変形可能なものに限られるので，おのずと数学的性質が式の形となって現れることになる。特に，方程式論において

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解が α, β

$$\iff \text{恒等的に } ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 3 解が α, β, γ

$$\iff \text{恒等的に } ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

という著しい関係が成り立つ。6(1)のように展開して係数を比べると，

$$2 \text{ 次方程式の解と係数の関係： } \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$3 \text{ 次方程式の解と係数の関係： } \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

が得られる。不等式の場合も，

$$f(x) \leq 0 \iff y = f(x) \text{ かつ } y \leq 0$$

のように言い換えられるので，方程式の場合と同じ考え方が通用する。

逆に，方程式論の結果を多項式の考察に活かして，2 次方程式の解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より

$$ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

と因数分解することができる。ちなみに，平方完成して 2 次方程式の解の公式を導く式変形に現れる等式も恒等式である。

解答：

(1) 問題の仮定より， x についての恒等式

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + k &= (x - \alpha)^2(x - \beta) \\ &= x^3 - (2\alpha + \beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta \end{aligned}$$

が成り立つ。係数を比べると

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 & \dots\dots \textcircled{1} \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = -1 & \dots\dots \textcircled{2} \\ k = -\alpha^2\beta & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

①, ②より β を消去すると

$$\alpha^2 + 2\alpha(1 - 2\alpha) = -1$$

$$3\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)(3\alpha + 1) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1, \quad -\frac{1}{3}$$

よって、①かつ②を解くと

$$(\alpha, \beta) = (1, -1), \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

③より

$$k = 1, -\frac{5}{27} \quad (\text{答})$$

そのとき、重解は

$$k = 1 \text{ のとき } 1, \quad k = -\frac{5}{27} \text{ のとき } -\frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

(注) 1° 3次方程式の重解は2重解の場合と3重解の場合があるが、 $(x-\alpha)^2(x-\beta)$ の表示はどちらの場合にも対応している。

2° 重解条件は判別式が0ととらえることもできるが、3次方程式の判別式は求めるのが面倒なので、仮に高校で習うとしても実用的ではない。

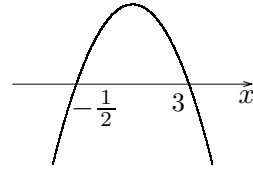
3° $(x-\alpha)^2(x-\beta) = x^3 - (2\alpha+\beta)x^2 + (\alpha^2+2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta$ の展開は、解と係数の関係を逆利用することで手早く計算できる。

(2) 題意の2次不等式は

$$ax^2 + bx + 1 \leq 0 \iff y = ax^2 + bx + 1 \text{ かつ } y \leq 0$$

であるから、不等式の解が $x \leq -\frac{1}{2}$ または $x \geq 3$ となるための条件は、 $a < 0$ かつ x についての恒等式

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + 1 &= a\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) \\ &= ax^2 - \frac{5}{2}ax - \frac{3}{2}a \end{aligned}$$



が成り立つことである。係数を比べると

$$-\frac{5}{2}a = b \text{ かつ } -\frac{3}{2}a = 1$$

$$\therefore a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{5}{3} \quad (a < 0 \text{ を満たす}) \quad (\text{答})$$

(3) 2次方程式の解の公式より

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ の解は } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であるから、 $x^2 - x - 1$ は

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \quad (\text{答})$$

と因数分解される。

(研究) (3)で考えた構造から、整数係数の2次式 $ax^2 + bx + c$ が整数係数の1次式の積に因数分解できるための必要十分条件は、 $b^2 - 4ac$ が平方数となることである。

8 確認：2変数の多項式 $f(x, y)$ が、恒等式 $f(y, x) = f(x, y)$ を満たすとき対称式といい、恒等式 $f(y, x) = -f(x, y)$ を満たすとき交代式という。(多項式でなくても対称式、交代式と呼ぶ場合もある。)

2変数の多項式 $P(x, y)$ が対称式であるとき、 $P(x, y)$ は(2次の)基本対称式 $x + y$, xy の多項式で表現できる。その証明は次数についての数学的帰納法で容易に示されるが、数学的帰納法をあとで習う関係上、証明なしに事実だけを用いてよいことになっている。多項式 $P(x, y)$ が交代式の場合は、あとから確認する因数定理(→ 10)により $x - y$ を因数にもち、 $x - y$ で割った商(→ 9)は対称式になる。また、交代式は平方すれば対称式になることも忘れてはならない。

本問では扱わないが、多変数の場合も同様である。どの2つの変数を入れ換えてももとの式と同じになるものを対称式、 -1 倍になるものを交代式という。 n 変数対称式は n 変数の基本対称式の(n 次式とは限らない)多項式で表される。

多項式 $P(x, y)$ が対称式であるとき、 $P\left(x, \frac{1}{x}\right)$ は $x + \frac{1}{x}$ と $x \cdot \frac{1}{x}$ で表されるはずであるが、結局 $x + \frac{1}{x}$ だけで表されることになる。

解答：

(1) (i)(ii) α, β は2次方程式 $x^2 - 7x + 4 = 0$ の2解であるから、恒等式

$$x^2 - 7x + 4 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

が成り立つので、係数を比べると

$$\alpha + \beta = 7, \quad \alpha\beta = 4 \quad (\text{答})$$

$$(iii) \quad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 7^2 - 4 = 45 \quad (\text{答})$$

$$(iv) \quad \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 7^3 - 3 \times 4 \times 7 = 259 \quad (\text{答})$$

$$(v) \quad \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\ = (7^2 - 2 \times 4)^2 - 2 \times 4^2 = 1649 \quad (\text{答})$$

$$(vi) \quad \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

ここで、

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 7^2 - 4 \times 4 = 33$$

であることより、(iii)とあわせて

$$\alpha^3 - \beta^3 = \pm 45\sqrt{33} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = a^2 - 2 \quad (\text{答})$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = a^3 - 3a \quad (\text{答})$$

9 確認：整数 a, b に対して $a = bq$ を満たす整数 q があるとき， a は b で割り切れるまたは a は b の倍数であるといい， b は a の約数という。 $b > 0$ のとき，

$$a = bq + r \quad (q, r \text{ は整数}, 0 \leq r < b)$$

と表すことを「 a を b で割る」といい， q を商， r を余りという。以上は中学で習った整数の知識であるが，これらを多項式にもあてはめようというのである。

あらためて，多項式 A, B に対して $A = BQ$ を満たす多項式 Q があるとき， A は B で割り切れるまたは A は B の倍数であるといい， B は A の約数であるという。

$B \neq 0$ (B が零多項式でない) とするとき，多項式 Q, R を用いて

$$A = BQ + R, \quad (R \text{ の次数}) < (B \text{ の次数})$$

と表すことを「 A を B で割る」といい， Q を商， R を余りという。また，

$$(A \text{ の次数}) = (B \text{ の次数}) + (Q \text{ の次数})$$

が成り立つことにも注意しよう。

多項式の除法は恒等式なので，実際の問題解決にあたっては [6] で練習したことが役に立つ。さらに，多項式 $f(x)$ にある値 α を代入して $f(\alpha)$ を求めたいときは， $g(\alpha) = 0$ を満たすできるだけ次数の低い多項式 $g(x)$ を求めておき， $f(x)$ を $g(x)$ であらかじめ割って (恒等式を導いて) おけば，実質的には余りの多項式に α を代入するだけの計算になって見通しが良い。しかも，どんなに $f(x)$ の次数が高くなっても，余りが $g(x)$ より低次であることもうれしい。

解答：

$$(1) \quad 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2 = (x^2 + 2x + 3)(2x^2 - 7x + 9) + 2x - 25 \text{ より}$$

商は $2x^2 - 7x + 9$ ，余りは $2x - 25$ (答)

$$(2) \quad ax^3 + bx^2 - 2 \text{ が } (x + 1)^2 \text{ で割り切れることは，恒等式}$$

$$ax^3 + bx^2 - 2 = (x + 1)^2(ax + c)$$

が成り立つことと同値である。右辺を展開すると

$$\begin{aligned} (x + 1)^2(ax + c) &= (x^2 + 2x + 1)(ax + c) \\ &= ax^3 + (2a + c)x^2 + (a + 2c)x + c \end{aligned}$$

となるから，左辺と比べて

$$2a + c = b \quad \text{かつ} \quad a + 2c = 0 \quad \text{かつ} \quad c = -2$$

$$\therefore a = 4, \quad b = 6 \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad x = 3 - 2\sqrt{2} \text{ のとき，}$$

$$(x - 3)^2 = (-2\sqrt{2})^2 \text{ すなわち } x^2 - 6x + 1 = 0$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^3 - 21x^2 - x + 2 &= (x^2 - 6x + 1)(2x^2 + 4x + 1) + x + 1 \\ &= 0 \times (2x^2 + 4x + 1) + (3 - 2\sqrt{2}) + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

10 確認：(1)で示すように，

多項式 $P(x)$ を $x - \alpha$ で割るときの余りは $P(\alpha)$

となり，これを剰余の定理という。代入計算で割り算が完了することの効果は大きい。

剰余の定理で余りが 0 の場合を因数定理という。すなわち

多項式 $P(x)$ が $x - \alpha$ で割り切れる $\iff P(\alpha) = 0$

高校で出題される 3 次以上の方程式は，有理数解をもつものに限られているので，

$$(\text{有理数解}) = \frac{(\text{定数項の約数})}{(\text{最高次係数の約数})}$$

の中から 1 つ解を見つけることで，因数定理により 1 次の因数が確定する。

剰余の定理と因数定理は，1 次式で割る場合にしか通用しないので，高校の授業で強調されるほどには役に立たない。ただ， $x - \alpha$ と $x - \beta$ は $\alpha \neq \beta$ のときには互いに素となって

$$P(\alpha) = P(\beta) = 0$$

\iff 「 $P(x)$ が $x - \alpha$ で割り切れる」かつ「 $P(x)$ が $x - \beta$ で割り切れる」

\iff 「 $P(x)$ が $(x - \alpha)(x - \beta)$ で割り切れる」

が成り立つので，(3)のように 2 次以上で割る場合にも活かせることもある。

解答：

(1) 多項式 $P(x)$ を $x - \alpha$ で割るとき，余りは (1 次より低次の) 定数であり，

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r$$

を満たす多項式 $Q(x)$ と定数 r が存在する。

この恒等式に， $Q(x)$ を消すため $x = \alpha$ を代入することにより，

$$r = P(\alpha) \quad (\text{おわり})$$

(2) $2x^3 + x^2 - 10x + 6$ に $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ を代入していくと

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{3}{2} + 6 = \frac{27+9}{4} - 15 + 6 = 0$$

となって， $2x - 3$ を因数にもつことがわかるから，

$$2x^3 + x^2 - 10x + 6 = (2x - 3)(x^2 + 2x - 2)$$

2 次の因数の部分は 2 次方程式の解の公式を用いて，求める 3 次方程式の解は

$$x = \frac{3}{2}, -1 \pm \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(3) $P(x) = (x - 3)(x - 5)Q(x) + ax + b$ ($Q(x)$ は多項式， a, b は定数)

と表すことができ，仮定および剰余の定理より

$$P(3) = 3a + b = 3, \quad P(5) = 5a + b = -21$$

$$\therefore a = -12, \quad b = 39$$

よって， $P(x)$ を $(x - 3)(x - 5)$ で割った余りは

$$-12x + 39 \quad (\text{答})$$

□11 確認：方程式の解とは，その方程式を満たす値のことであるから， $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ が解であればそれを代入して成り立つ条件を求めればよい。本問(1)では有理数係数の仮定があるので，有理数 p, q と無理数 α に対して

$$p + q\alpha = 0 \iff p = q = 0$$

が成り立つことを用いる。これを詳しく述べれば， $p + q\alpha = 0$ かつ $q \neq 0$ とすると有理数 $-\frac{p}{q}$ が存在することになり，それが無理数 α に一致するのは矛盾である。

a, b が定まれば，あとは 3 次方程式を解いてすべての解を求めればよい。

(2) についても，実数 p, q と虚数 α に対して

$$p + q\alpha = 0 \iff p = q = 0$$

が成り立つことを用いれば，(1)と同じ考え方が通用する。

見かけ上は，単なる代入計算と □10(2)と同じ作業との組合せ問題に見えるが，実際には代入計算や因数分解を機械的に行なうと大変であることが多い。そこで，□9(3)の計算方法を応用して多項式の構造をうまく利用することが基本となる。

解答：

(1) $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を解にもつ方程式を一つ求めると，

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \sqrt{5} \\ (2x - 1)^2 &= 5 \\ 4x^2 - 4x - 4 &= 0 \\ \therefore x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

この 2 次式 $x^2 - x - 1$ で割ることにより，恒等式

$$x^3 + ax + b = (x^2 - x - 1)(x + 1) + (a + 2)x + b + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立ち， $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を代入すると 0 になるから，

$$0 \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right) + (a + 2) \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$a + 2, b + 1$ は有理数， $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ は無理数であるから，②より

$$\begin{aligned} a + 2 &= b + 1 = 0 \\ \therefore a &= -2, \quad b = -1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

このとき，①より

$$x^3 + ax + b = (x^2 - x - 1)(x + 1)$$

であるから，3 次方程式のすべての解は

$$x = -1, \quad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{答})$$

(2) $x = 1 + i$ を解にもつ 2 次方程式を一つ求めると,

$$(x - 1)^2 = i^2 \quad \therefore x^2 - 2x + 2 = 0$$

この 2 次式 $x^2 - 2x + 2$ で割ることにより, 恒等式

$$\begin{aligned} 2x^3 + ax^2 + bx - 6 &= (x^2 - 2x + 2)(2x + a + 4) + (2a + b + 4)x - 2a - 14 \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立ち, $x = 1 + i$ を代入すると 0 になるから

$$(2a + b + 4)(1 + i) - 2a - 14 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$2a + b + 4$, $-2a - 14$ は実数で $1 + i$ は虚数であるから, $\textcircled{4}$ より

$$2a + b + 4 = 0 \quad \text{かつ} \quad -2a - 14 = 0$$

$$\therefore a = -7, \quad b = 10 \quad (\text{答})$$

これを $\textcircled{3}$ に代入して

$$2x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x^2 - 2x + 2)(2x - 3)$$

であるから,

$$\text{残りの解は } 1 - i, \quad \frac{3}{2} \quad (\text{答})$$

(注)

1° $\textcircled{4}$ では, わざわざ実部と虚部に分けて整理する必要はない。そもそも, 複素数の相等条件はベクトルと同じと定義されているので, 実部・虚部の比較は 2 つのベクトル $1, i$ が 1 次独立であることを意味する。 $\textcircled{4}$ における 2 つのベクトル $1, 1 + i$ も 1 次独立であるから, 同じ論理が通用してそのまま比較することができる。

2° $1 + i$ を一般の虚数定数 $a + bi$ (a, b は実数, $b \neq 0$) に変えて上の議論を行なうと, $a + bi$ は 2 次方程式 $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$ の解であり, 2 つのベクトル $1, a + bi$ は 1 次独立であるから,

実数係数の多項式に虚数 $a + bi$ (a, b は実数) を代入して 0 になるならば, その多項式は $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ で割り切れ, $a - bi$ を代入しても 0 になる

という定理が導かれる。

12 確認：2 で確認したように，式を展開する際には各因数から1つずつ項を選んで掛け合わせ(て同類項をまとめる)るので， $(a+b)^n$ (n は自然数)を展開したとき， $a^k b^{n-k}$ の項は n 個の $a+b$ のうち k 個からは a を選び， $n-k$ 個からは b を選んだ積として得られる。その選び方は ${}_n C_k = {}_n C_{n-k}$ 通りあるから，展開式は明らかに

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^{n-k} b^k$$

となる。この二項係数についての関係式が成り立つことを二項定理という。この関係式もまた，多項式の構造を特徴づける恒等式である。

解答：

(1) 二項定理を用いて展開すると，

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 {}_9 C_k \cdot x^{9-k} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^9 {}_9 C_k (-2)^k x^{9-3k}$$

定数項は 0 次の項のことで， $9-3k=0$ とおくと $k=3$ であるから，

$$\text{定数項は } {}_9 C_3 (-2)^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times (-8) = -672 \quad (\text{答})$$

$9-3k=3$ とおくと $k=2$ であるから，

$$x^3 \text{ の係数は } {}_9 C_2 (-2)^2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \times 4 = 144 \quad (\text{答})$$

$9-3k=4$ ($0 \leq k \leq 9$) を満たす整数 k は存在しないから，

$$x^4 \text{ の係数は } 0 \quad (\text{答})$$

(注) $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 {}_9 C_k \cdot x^k \left(-\frac{2}{x^2}\right)^{9-k}$ と展開してもよいが， ${}_9 C_k = {}_9 C_{9-k}$ であることを活用して，処理しやすい方を採用するとよい。

(2) 二項定理より

$${}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_n x^n = (1+x)^n$$

となるから， $x=1$ を代入して

$${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n = 2^n \quad (\text{おわり})$$

(注) 本問に限っては， n 人を A, B の部屋に振り分ける方法を 2 通りに数えることで，二項定理に頼らず直接導くこともできる。

(3) 二項定理より

$$3^n = (4-1)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k 4^{n-k} (-1)^k = (4 \text{ の倍数}) + (-1)^n$$

であるから， 3^n を 4 で割った余りは

$$n \text{ が偶数のとき } 1, \quad n \text{ が奇数のとき } 3 \quad (\text{答})$$