

2026 年 1 月

入 試 直 前 模 試

理 系

1. 制限時間は 120 分が目安です。受験大学にあわせて設定は適当に変更して下さい。
2. 出題範囲は一般の国公立大学理系と同じです。理系でも，志望大学の出題範囲が数学 II・B までの人は，文系の問題を解いてください。
3. 難問，易問を排し，すべての問題を標準レベルにそろえてあります。
4. 問題は 2 ページから 6 ページまで 5 題，そのあとに解答が続きます。
5. 単に実力を試してみるだけでなく，解き切れなかった問題をよく復習することによって，実際の入試に役立てて下さい。
6. 文系の冊子の問題も解いてみることをおすすめします。

1 3 次方程式

$$x^3 + 2x - 1 = 0 \quad \cdots \cdots (*)$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 次を示せ。

$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ 次方程式 } (*) \text{ はただ一つの実数解をもつ。この実数解を } \alpha \\ \text{と表すと } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ が成り立つ。} \end{array} \right.$

(2) 3 次方程式 (*) の虚数解のうち，虚部の大きい方を β ，小さい方を γ と表す。 β と γ を (1) で定めた α を用いて表せ。

(3) 複素数平面において，(1), (2) で定めた α, β, γ の表す点をそれぞれ A, B, C とする。三角形 ABC における内角 $\angle A$ と $\frac{2}{3}\pi$ はどちらが大きいかに判定せよ。

2 赤玉が 2 個，白玉が 1 個入っている袋がある。さいころを投げ，3 の倍数の目が出たら白玉を 1 個，3 の倍数ではない目が出たら赤玉を 1 個，この袋の中に追加することにする。さいころを 2 回投げて袋の中に 2 個の玉を追加した後，よく混ぜ，袋の中から 3 個玉を同時に取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

- (1) 袋から取り出した玉が 3 個とも白玉である確率を求めよ。
- (2) 袋から取り出した玉が赤玉 2 個，白玉 1 個である確率を求めよ。
- (3) 袋から取り出した玉が赤玉 2 個，白玉 1 個であったとき，袋の中に残っている 2 個の玉がどちらも白玉である確率を求めよ。

□ 3 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定められている。

- (1) 任意の自然数 n に対して, $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{2}{n}$ であることを示せ。
- (2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。
- (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ を求めよ。

4 1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において, 辺 OA の中点を D , 辺 AB を $2:1$ に外分する点を E , 直線 DE と辺 OB の交点を S とし, 辺 OC を $3:1$ に内分する点を T , 直線 AC と直線 DT の交点を F とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき, 次の問に答えよ。

- (1) \overrightarrow{OF} と \overrightarrow{OS} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) 直線 EF と直線 ST が 1 点で交わることを示せ。また, このときの交点を P とするとき, $SP:TP$ を求めよ。
- (3) 点 O を通り平面 DEF に垂直な直線と平面 ABC の交点を Q とするとき, \overrightarrow{OQ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

5 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ とする。 $f(s) = f(t)$, $0 < s < t$ を満たす実数 s, t が存在するとき, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = f(t)$, および y 軸で囲まれた 2 つの部分の面積和を $S(t)$ とする。

- (1) $f(s) = f(t)$, $0 < s < t$ を満たすとき, s を t の式で表せ。また, t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) 面積和 $S(t)$ を t の式で表せ。
- (3) (1) で求めた t の範囲において, $S(t)$ の最小値を求めよ。

$$\boxed{1} \quad x^3 + 2x - 1 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

(1) $f(x) = x^3 + 2x - 1$ とおくと,

$$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$$

より $f(x)$ は増加関数であるから,

(*) を満たす実数 x は多くても 1 つしかない。 $\dots\dots \textcircled{A}$

$f(x)$ は連続関数であり,

$$f(0) = -1 < 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$$

であるから, 中間値の定理より

(*) を満たす実数 x は $0 < x < \frac{1}{2}$ の範囲に

少なくとも 1 つ存在する。 $\dots\dots \textcircled{B}$

①かつBより, 方程式(*)は実数解をただ一つもち, その実数解 α は $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ の範囲にある。 (証明おわり)

(注) 上の解答では, $f(x)$ が連続であることを直接には証明していないが, 教科書で導関数の公式が認められている関数については, 微分可能であること(したがって連続であること)を証明なしに用いてよいと思われる。ただし, 本問のように「連続であること」が論点となっている場合は, 指摘だけはしておく必要がある。

(2) α は(*)の解であるから

$$\alpha^3 + 2\alpha - 1 = 0$$

が成り立ち, これを用いて

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= x^2 + 2x - 1 - (\alpha^3 + 2\alpha - 1) \\ &= x^3 - \alpha^3 + 2(x - \alpha) \\ &= (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2 + 2) \\ &= (x - \alpha) \left\{ \left(x + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}\alpha^2 + 2 \right\} \\ &= (x - \alpha) \left(x + \frac{\alpha}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}\alpha^2 + 2} \right) \left(x + \frac{\alpha}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}\alpha^2 + 2} \right) \end{aligned}$$

$Im(\beta) > Im(\gamma)$ より

$$\begin{cases} \beta = -\frac{\alpha}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}\alpha^2 + 2} = \frac{-\alpha + \sqrt{3\alpha^2 + 8}i}{2} \\ \gamma = -\frac{\alpha}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}\alpha^2 + 2} = \frac{-\alpha - \sqrt{3\alpha^2 + 8}i}{2} \end{cases} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \frac{-3\alpha + \sqrt{3\alpha^2 + 8}i}{-3\alpha - \sqrt{3\alpha^2 + 8}i} \\ &= \frac{(-3\alpha + \sqrt{3\alpha^2 + 8}i)^2}{9\alpha^2 + (3\alpha^2 + 8)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9\alpha^2 + 6\alpha\sqrt{3\alpha^2 + 8}i - (3\alpha^2 + 8)}{12\alpha^2 + 8} \\
&= \frac{3\alpha^2 - 4 + 3\alpha\sqrt{3\alpha^2 + 8}i}{2(3\alpha^2 + 2)}
\end{aligned}$$

$$\angle A = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \theta \quad (0 < \theta < \pi) \text{ とおくと,}$$

$$\cos \theta = \frac{3\alpha^2 - 4}{2(3\alpha^2 + 2)}, \quad \sin \theta = \frac{3\alpha\sqrt{3\alpha^2 + 8}}{2(3\alpha^2 + 2)}$$

(1) より $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ であるから,

$$0 < \alpha^2 < \frac{1}{4} \quad \therefore -4 < 3\alpha^2 - 4 < -\frac{9}{4}$$

特に $\cos \theta < 0$ であるから

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

であり, この範囲で $\cos \theta$ が減少することと考えて,

$$\begin{aligned}
\cos \theta - \cos \frac{2}{3}\pi &= \frac{3\alpha^2 - 4}{2(3\alpha^2 + 2)} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(3\alpha^2 - 4) + (3\alpha^2 + 2)}{2(3\alpha^2 + 2)} \\
&= \frac{3\alpha^2 - 1}{3\alpha^2 + 2} < 0
\end{aligned}$$

より,

$$\theta = \angle A > \frac{2}{3}\pi \quad (\text{答})$$

(注) $\cos \theta$ は周期関数であるから,

$$\cos \theta < \cos \frac{2}{3}\pi$$

というだけでは, $\theta > \frac{2}{3}\pi$ とはいえない。 θ がどの範囲を前提として論じられているかが, 証明する上で重要である。

□2 さいころを 2 回投げたあと、袋の中の玉の個数について

$$\text{赤玉 2 個, 白玉 3 個となる確率は } \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{赤玉 3 個, 白玉 2 個となる確率は } \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{赤玉 4 個, 白玉 1 個となる確率は } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(1) 袋から取り出された玉が 3 個とも白玉となるのは、さいころを 2 回投げて袋の中が赤玉 2 個。白玉 3 個となって、そこから 3 個の白玉を取り出す場合であるから、確率は

$$\frac{1}{9} \times \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{90} \quad (\text{答})$$

(2) さいころを 2 回投げた直後に起こる 3 つの場合に分けて、5 個の玉から赤玉 2 個、白玉 1 個を取り出す確率を求めると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} \times \frac{1 \times 3}{{}_5C_3} + \frac{4}{9} \times \frac{3 \times 2}{{}_5C_3} + \frac{4}{9} \times \frac{{}_4C_2 \times 1}{{}_5C_3} \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} \\ &= \frac{1+8+8}{30} \\ &= \frac{17}{30} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 赤玉 2 個、白玉 1 個を取り出したあと袋の中に 2 個の白玉が残っているのは、さいころを 2 回投げた直後の袋の中に赤玉 2 個、白玉 3 個が入っている場合であるから、最後に白玉が 2 個残る確率は

$$\frac{1}{9} \times \frac{1 \times 3}{{}_5C_3} = \frac{1}{30}$$

よって、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{30}}{\frac{17}{30}} = \frac{1}{17} \quad (\text{答})$$

3

(1) $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{2}{n}$ が成り立つことを, n についての数学的帰納法で示す。

1° $n = 1$ のとき

$a_1 = 1$ であるから, $1 \leq a_1 \leq 2$ が成り立つ。

2° $n = 2$ のとき

$$a_2 = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 = \frac{1}{2}$$

であるから, $\frac{1}{2} \leq a_2 \leq 1$ が成り立つ。

3° $n = k (\geq 2)$ のとき

$$\frac{1}{k} \leq a_k \leq \frac{2}{k} (\leq 1)$$

が成り立つとすれば,

$$a_{k+1} = -\frac{1}{2}a_k^2 + a_k = -\frac{1}{2}(a_k - 1)^2 + \frac{1}{2}$$

より

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{k} \leq a_{k+1} \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}$$

であるが, ここで

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= \frac{-(k+1) + 2k(k+1) - 2k^2}{2k^2(k+1)} \\ &= \frac{k-1}{2k^2(k+1)} \\ &\geq 0 \\ \frac{2}{k+1} - \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}\right\} &= \frac{2k^2 + 2(k+1) - 2k(k+1)}{k^2(k+1)} \\ &= \frac{2}{k^2(k+1)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{1}{k+1} \leq a_{k+1} \leq \frac{2}{k+2}$$

が成り立つ。

1°, 2°, 3° より, 任意の自然数 n に対して, $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{2}{n}$ が成り立つ。

(証明おわり)

(2) (1) より

$$a_n \geq \frac{1}{n}$$

であり, 関数 $y = \frac{1}{x}$ が減少関数であることより

$$\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1) - \log n$$

であるから ,

$$\sum_{k=1}^n a_k > \sum_{k=1}^n \{\log(k+1) - \log k\} = \log(n+1)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = \infty$ であるから , 追い出しの原理より

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \text{ は (正の無限大に) 発散 (答)}$$

する。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を定める漸化式より

$$a_n^2 = 2(a_n - a_{n+1})$$

であるから ,

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = 2 \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = 2(a_1 - a_{n+1}) = 2(1 - a_{n+1})$$

(1) より $\frac{1}{n+1} \leq a_{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$ であり , ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$$

であるから , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束して ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(1 - a_{n+1}) = 2 \quad (\text{答})$$

である。

4

(1) $\triangle OAC$ と直線 DF にメネラウスの定理を適用すると,

$$\frac{OD}{DA} \cdot \frac{AF}{FC} \cdot \frac{CT}{TO} = \frac{1}{1} \cdot \frac{AF}{FC} \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad \therefore \frac{AF}{FC} = 3$$

点 F は AC を $3:1$ に外分するから,

$$\overrightarrow{OF} = \frac{-\vec{a} + 3\vec{c}}{3-1} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c} \quad (\text{答})$$

 $\triangle OAB$ と直線 DE にメネラウスの定理を適用すると,

$$\frac{OS}{SB} \cdot \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AD}{DO} = \frac{OS}{SB} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1 \quad \therefore \frac{OS}{SB} = 2$$

点 S は OB を $2:1$ に内分するから

$$\overrightarrow{OS} = \frac{2}{3}\vec{b} \quad (\text{答})$$

(2) 点 E は AB を $2:1$ に外分するから

$$\overrightarrow{OE} = \frac{-\vec{a} + 2\vec{b}}{2-1} = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

点 T は OC を $3:1$ に内分するから

$$\overrightarrow{OT} = \frac{3}{4}\vec{c}$$

直線 ST 上の点 P は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1-k)\overrightarrow{OS} + k\overrightarrow{OT} \quad (k \text{ は実数}) \quad \dots\dots (*) \\ &= \frac{2}{3}(1-k)\vec{b} + \frac{3}{4}k\vec{c} \end{aligned}$$

と表され, \vec{b}, \vec{c} の係数に注目すれば

$$\begin{aligned} &= \frac{1-k}{3}(-\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{k}{2}\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}\right) + \left(\frac{1-k}{3} + \frac{k}{4}\right)\vec{a} \\ &= \frac{1-k}{3}\overrightarrow{OE} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OF} + \frac{4-k}{12}\vec{a} \end{aligned}$$

と変形できる。点 P が直線 EF 上の点でもあるための条件は

$$\frac{1-k}{3} + \frac{k}{2} = 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{4-k}{12} = 0$$

であるが, 実際

$$k = 4$$

がそれを満たすから, 直線 EF と直線 ST は 1 点 P で交わることが示された。

(*)に代入すると

$$\overrightarrow{OP} = -3\overrightarrow{OS} + 4\overrightarrow{OT} = \frac{-3\overrightarrow{OS} + 4\overrightarrow{OT}}{4-3}$$

が得られるから, 点 P は ST を $4:3$ に外分し,

$$SP:PT = 4:3 \quad (\text{答})$$

(3) 四面体 $OABC$ は一辺の長さ 1 の正四面体であるから,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1^2 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ と $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = -\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$ の両方に垂直なベクトルを

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \quad (x, y, z \text{ は定数}) \quad \dots\dots ①$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \overrightarrow{DE} &= -\frac{3}{2}x|\vec{a}|^2 + \left(2x - \frac{3}{2}y\right)\vec{a} \cdot \vec{b} + 2y|\vec{b}|^2 - \frac{3}{2}z\vec{c} \cdot \vec{a} + 2z\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= -\frac{3}{2}x \times 1^2 + \left(2x - \frac{3}{2}y\right) \times \frac{1}{2} + 2y \times 1^2 - \frac{3}{2}z \times \frac{1}{2} + 2z \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4}z = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore -2x + 5y + z = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \overrightarrow{DF} &= -x|\vec{a}|^2 + \left(\frac{3}{2}x - z\right)\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{3}{2}z|\vec{c}|^2 - y\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3}{2}y\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= -x \times 1^2 + \left(\frac{3}{2}x - z\right) \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z \times 1^2 - y \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore -x + y + 4z = 0 \quad \dots\dots ③$$

③ - ② $\times 4$ より

$$7x - 19y = 0 \quad \therefore \frac{x}{19} = \frac{y}{7} \quad \dots\dots ④$$

② - ③ $\times 2$ より

$$3y - 7z = 0 \quad \therefore \frac{y}{7} = \frac{z}{3} \quad \dots\dots ⑤$$

④かつ⑤より

$$\frac{x}{19} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$$

よって, 法線ベクトル \vec{v} は

$$\vec{v} = 19\vec{a} + 7\vec{b} + 3\vec{c}$$

であるとしてよい。 \overrightarrow{OQ} は平面 DEF と垂直であるから

$$\overrightarrow{OQ} = t\vec{v} = 19t\vec{a} + 7t\vec{b} + 3t\vec{c} \quad (t \text{ は実数}) \quad \dots\dots ⑥$$

と表され, 点 Q は平面 ABC 上の点でもあるから

$$19t + 7t + 3t = 1 \quad \therefore t = \frac{1}{29}$$

⑥に代入して

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{19}{29}\vec{a} + \frac{7}{29}\vec{b} + \frac{3}{29}\vec{c} \quad (\text{答})$$

(注)

1° 一見すると, 本問は平面 ABC 上の点 Q を $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ とでも置

いて $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ かつ $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ を計算するだけの典型問題に見えるが、その方針で作業を進めると、膨大な計算量となる。根性で乗り切ることにも不可能ではないが、これまで学習してきたことを総合的に活用することをおすすめする。

2° ②かつ③の計算はふつうに連立方程式として処理すればよいが、本問では比を求めることが主眼なので、上の解答では比例式を意識して変形している。

5

(1) $0 < s < t$ のもとで $\frac{s}{s^2+1} = \frac{t}{t^2+1}$ を解くと,

$$\begin{aligned} s(t^2+1) &= t(s^2+1) \\ st(s-t) - (s-t) &= 0 \\ (s-t)(st-1) &= 0 \end{aligned}$$

$s < t$ より

$$s = \frac{1}{t} \quad (\text{答})$$

$t > 0$ かつ $\frac{1}{t} < t$ より, t のとり得る値の範囲は

$$t > 1 \quad (\text{答})$$

(2) (1)を参考にして計算すると

$$f(x) - f(t) = \frac{-t\left(x - \frac{1}{t}\right)(x-t)}{(x^2+1)(t^2+1)}$$

が得られ,

$$0 \leq x \leq \frac{1}{t} \text{ において } f(x) \leq f(t), \quad \frac{1}{t} \leq x \leq t \text{ において } f(x) \geq f(t)$$

であるから, 面積和 $S(t)$ は

$$S(t) = \int_0^{\frac{1}{t}} \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx + \int_{\frac{1}{t}}^t \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{t}{t^2+1} \right) dx$$

により求められる。ここで,

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから,

$$\begin{aligned} S(t) &= \left[\frac{t}{t^2+1} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_0^{\frac{1}{t}} + \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1) - \frac{t}{t^2+1} x \right]_{\frac{1}{t}}^t \\ &= 2 \left\{ \frac{t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{t^2}+1\right) \right\} + \frac{1}{2} \log(t^2+1) - \frac{t}{t^2+1} \cdot t \\ &= \frac{2}{t^2+1} - \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \log t^2 - \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) \\ &= \frac{3}{t^2+1} - \frac{1}{2} \log(t^2+1) + 2 \log t - 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $S(t)$ を微分して,

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\frac{3}{(t^2+1)^2} \cdot 2t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t + \frac{2}{t} \\ &= \frac{-6t^2 - t^2(t^2+1) + 2(t^2+1)^2}{t(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{t^4 - 3t^2 + 2}{t(t^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{(t^2 - 1)(t^2 - 2)}{t(t^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$t > 1$ において

$$S'(t) < 0 \iff t^2 - 2 < 0 \iff t < \sqrt{2}$$

であるから, ($S'(t)$ の符号と) $S(t)$ の増減は

t	(1)	$\sqrt{2}$	(∞)
$S'(t)$	-	0	+
$S(t)$		\searrow 極小 \nearrow	

よって, 面積和 $S(t)$ の最小値は

$$S(\sqrt{2}) = \frac{3}{2+1} - \frac{1}{2} \log 3 + \log 2 - 1 = \log \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$