

2026 年 1 月

入 試 直 前 模 試

文 系

1. 制限時間は 100 分が目安です。受験大学にあわせて設定は適当に変更して下さい。
2. 出題範囲は一般の国公立大学文系と同じです。
3. 難問，易問を排し，すべての問題を標準レベルにそろえてあります。
4. 問題は 2 ページから 5 ページまで 4 題，そのあとに解答が続きます。
5. 単に実力を試してみるだけでなく，解き切れなかった問題をよく復習することによって，実際の入試に役立てて下さい。

1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = c$ および

$$\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = -b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + c_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとする。ただし, c は 0 でない実数とする。また, $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき, 次の各問に答えよ。

- (1) 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $f_n(x) = 0$ の判別式を D_n とする。 D_n の一般項を求めよ。
- (3) 2 次方程式 $f_{2026}(x) = 0$ が重解をもつとき, 2 次式 $f_3(x)$ を求めよ。
- (4) (3) のとき, 2 次方程式 $f_{2026}(x) = 0$ の重解を求めよ。

2 赤玉が 2 個，白玉が 1 個入っている袋がある。さいころを投げ，3 の倍数の目が出たら白玉を 1 個，3 の倍数ではない目が出たら赤玉を 1 個，この袋の中に追加することにする。さいころを 2 回投げて袋の中に 2 個の玉を追加した後，よく混ぜ，袋の中から 3 個玉を同時に取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

- (1) 袋から取り出した玉が 3 個とも白玉である確率を求めよ。
- (2) 袋から取り出した玉が赤玉 2 個，白玉 1 個である確率を求めよ。
- (3) 袋から取り出した玉が赤玉 2 個，白玉 1 個であったとき，袋の中に残っている 2 個の玉がどちらも白玉である確率を求めよ。

□3 座標平面上において、円 $C: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 10$ と直線 $\ell: y = mx$ が 2 点 P, Q で交わっている。ただし、 m は正の定数である。

- (1) $P(\alpha, m\alpha), Q(\beta, m\beta)$ とおくとき、 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ をそれぞれ m の式で表せ。
- (2) 原点を O とするとき、 $OP = PQ$ となるような正の実数 m を求めよ。
- (3) (2) のとき、円 C の周および内部を直線 ℓ によって分けた 2 つの部分のうち、円 C の中心を含まない方の領域を D とする。 D の面積 S を求めよ。

□4 $f(x) = x^3 - 1$ とする。曲線 $y = f(x)$ を C 、点 $P\left(-\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$ における C の接線を ℓ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ℓ の方程式を求めよ。
- (2) C と ℓ の共有点のうち P でない方を Q とする。 Q の座標を求めよ。
- (3) C と ℓ で囲まれてできる領域の面積 S を求めよ。
- (4) ℓ の方程式を $y = g(x)$ とするとき、 $x \geq -\frac{3}{2}$ における $g(x) - f(x)$ の最大値を求めよ。

1

(1) 与えられた漸化式より

$$a_2 = c_1 = c,$$

$$b_2 = -b_1 - 2c_1 = -2 - 2c,$$

$$c_2 = a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 2 + c = c + 3$$

であるから,

$$f_2(x) = cx^2 - 2(c+1)x + c + 3 \quad (\text{答})$$

(2) 2 次方程式 $f_n(x) = 0$ の判別式 D_n は

$$D_n = b_n^2 - 4a_nc_n$$

与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= b_{n+1}^2 - 4a_{n+1}c_{n+1} \\ &= (-b_n - 2c_n)^2 - 4c_n(a_n + b_n + c_n) \\ &= b_n^2 - 4a_nc_n \\ &= D_n \end{aligned}$$

であるから, D_n は (n に関して) 定数であり,

$$D_n = D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 = 2^2 - 4 \times 1 \times c = -4c + 4 \quad (\text{答})$$

(3) 2 次方程式 $f_{2026}(x) = 0$ が重解をもつとき,

$$D_{2026} = -4c + 4 = 0 \quad \therefore c = 1$$

このとき

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 1$$

であり, (1) の計算と与えられた漸化式より

$$a_2 = c = 1, \quad b_2 = -2 - 2c = -4, \quad c_2 = c + 3 = 4$$

$$a_3 = c_2 = 4,$$

$$b_3 = -b_2 - 2c_2 = 4 - 2 \times 4 = -4,$$

$$c_3 = a_2 + b_2 + c_2 = 1 - 4 + 4 = 1$$

求める 2 次式 $f_3(x)$ は

$$f_3(x) = 4x^2 - 4x + 1 \quad (\text{答})$$

(4) 2 次方程式 $f_{2026}(x) = 0$ が重解をもつとき

$$c = 1$$

であり, (3) の計算より

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 1$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = -4, \quad c_2 = 4$$

$$a_3 = 4, \quad b_3 = -4, \quad c_3 = 1$$

与えられた漸化式より

$$a_4 = c_3 = 1,$$

$$b_4 = -b_3 - 2c_3 = 4 - 2 \times 1 = 2,$$

$$c_4 = a_3 + b_3 + c_3 = 4 - 4 + 1 = 1$$

であるから ,

$$a_{n+3} = a_n, \quad b_{n+3} = b_n, \quad c_{n+3} = c_n$$

が成り立つ (n について周期 3 を持つ)。

$$2026 = 3 \times 675 + 1$$

であるから ,

$$a_{2026} = a_1 = 1, \quad b_{2026} = b_1 = 2, \quad c_{2026} = c_1 = 1$$

よって , 2 次方程式

$$f_{2026}(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$$

の重解は

$$x = -1 \quad (\text{答})$$

である。

□2 さいころを 2 回投げたあと、袋の中の玉の個数について

$$\text{赤玉 2 個, 白玉 3 個となる確率は } \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{赤玉 3 個, 白玉 2 個となる確率は } \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{赤玉 4 個, 白玉 1 個となる確率は } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(1) 袋から取り出された玉が 3 個とも白玉となるのは、さいころを 2 回投げて袋の中が赤玉 2 個。白玉 3 個となって、そこから 3 個の白玉を取り出す場合であるから、確率は

$$\frac{1}{9} \times \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{90} \quad (\text{答})$$

(2) さいころを 2 回投げた直後に起こる 3 つの場合に分けて、5 個の玉から赤玉 2 個、白玉 1 個を取り出す確率を求めると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} \times \frac{1 \times 3}{{}_5C_3} + \frac{4}{9} \times \frac{3 \times 2}{{}_5C_3} + \frac{4}{9} \times \frac{{}_4C_2 \times 1}{{}_5C_3} \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} \\ &= \frac{1+8+8}{30} \\ &= \frac{17}{30} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 赤玉 2 個、白玉 1 個を取り出したあと袋の中に 2 個の白玉が残っているのは、さいころを 2 回投げた直後の袋の中に赤玉 2 個、白玉 3 個が入っている場合であるから、最後に白玉が 2 個残る確率は

$$\frac{1}{9} \times \frac{1 \times 3}{{}_5C_3} = \frac{1}{30}$$

よって、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{30}}{\frac{17}{30}} = \frac{1}{17} \quad (\text{答})$$

3

(1) $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 10$ と $y = mx$ を連立して y を消去すると

$$(x-1)^2 + (mx-7)^2 = 10$$

$$(m^2+1)x^2 - (14m+2)x + 40 = 0$$

この2次方程式の2解が α, β であるから, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{14m+2}{m^2+1}, \quad \alpha\beta = \frac{40}{m^2+1} \quad (\text{答})$$

(2) $OP = PQ$ となるのは $OQ = 2OP$ と同値であり,

$$\beta = 2\alpha \quad (0 < \alpha < \beta)$$

のときであるから,

$$\alpha + 2\alpha = \frac{14m+2}{m^2+1} \quad \text{かつ} \quad \alpha \cdot 2\alpha = \frac{40}{m^2+1}$$

 α を消去して

$$\left\{ \frac{2(7m+1)}{3(m^2+1)} \right\}^2 = \frac{20}{m^2+1}$$

$$(7m+1)^2 = 45(m^2+1)$$

$$4m^2 + 14m - 44 = 0$$

$$2m^2 + 7m - 22 = 0$$

$$(m-2)(2m+11) = 0$$

 $m > 0$ より

$$m = 2 \quad (\text{答})$$

(注) $OP = PQ$ を直接表すと, 2点間の距離公式より

$$OP = \sqrt{m^2+1} |\alpha|, \quad PQ = \sqrt{m^2+1} |\alpha - \beta|$$

であるから,

$$|\alpha| = |\alpha - \beta|$$

$$\alpha^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$0 = -2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\beta(-2\alpha + \beta) = 0$$

 $\beta \neq 0$ より

$$\beta = 2\alpha$$

以下, 上の解答と同じである。

(別解) (1)のヒントに頼らなくても解くことができる。

弦 PQ の中点を M とすると,

$$OP = PQ \iff OM = 3PM$$

 $\angle OMP = 90^\circ$ であるから, 三平方の定理より

$$OM^2 + CM^2 = OC^2$$

円 C の中心 $C(1, 7)$ と直線 $\ell: mx - y = 0$ の距離を d とすると,

$$(3\sqrt{10-d^2})^2 + d^2 = 1^2 + 7^2$$

$$9(10 - d^2) + d^2 = 50$$

$$\therefore d^2 = 5$$

点と直線の距離公式より

$$d = \frac{|m - 7|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

であるから,

$$\left(\frac{|m - 7|}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)^2 = 5$$

$$(m - 7)^2 = 5(m^2 + 1)$$

$$4m^2 + 14m - 44 = 0$$

$$2m^2 + 7m - 22 = 0$$

$$(m - 2)(2m + 11) = 0$$

$m > 0$ より

$$m = 2 \quad (\text{答})$$

(3) 円 C の中心 $(1, 7)$ と直線 $\ell: 2x - y = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|2 \times 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

円 C の半径は $\sqrt{10}$ であるから

$$PQ = 2\sqrt{10 - d^2} = 2\sqrt{5}$$

よって, $C(1, 7)$ として, $\triangle CPQ$ は $CP = CQ$ なる直角二等辺三角形となるから, 領域 D は半径 $\sqrt{10}$ の四分円から $\triangle CPQ$ を除いてできる弓形であり, 面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{10})^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{10})^2 = \frac{5}{2}\pi - 5 \quad (\text{答})$$

4

(1) $f(x) = x^3 - 1$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2$$

 $x = -\frac{3}{2}$ を代入して

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - 1 = -\frac{35}{8}, \quad f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

接線 ℓ の方程式は

$$y = \frac{27}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{35}{8} \quad \therefore y = \frac{27}{4}x + \frac{23}{4} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) - \left(\frac{27}{4}x + \frac{23}{4}\right) &= x^3 - 1 - \left(\frac{27}{4}x + \frac{23}{4}\right) \\ &= x^3 - \frac{27}{4}x - \frac{27}{4} \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2(x - 3) \end{aligned}$$

より

$$x_Q = 3, \quad f(3) = 3^3 - 1 = 26$$

であるから, 点 Q の座標は

$$(3, 26) \quad (\text{答})$$

(注) 今更ながらではあるが, $y = f(x)$ と $y = \frac{27}{4}x + \frac{23}{4}$ は $x = -\frac{3}{2}$ で接するから, $f(x) - \left(\frac{27}{4}x + \frac{23}{4}\right)$ が $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ で割り切れること(多項式の基本)は予めわかっている。そのため, 定数項を比べるだけで簡単に因数分解ができる。(3) (2)の計算も参考にして, C と ℓ で囲まれてできる領域の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{3}{2}}^3 \left\{ \frac{27}{4}x + \frac{23}{4} - (x^3 - 1) \right\} dx \\ &= - \int_{-\frac{3}{2}}^3 \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 \left(x + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \right) dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^3 \left\{ - \left(x + \frac{3}{2} \right)^3 + \frac{9}{2} \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4} \left(x + \frac{3}{2} \right)^4 + \frac{3}{2} \left(x + \frac{3}{2} \right)^3 \right]_{\frac{3}{2}}^3 \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{9}{2} \right)^4 + \frac{3}{2} \left(\frac{9}{2} \right)^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} \right)^3 \times \left(-\frac{9}{8} + \frac{12}{8} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2187}{64} \quad (\text{答})$$

(4) (1)より

$$g(x) = \frac{27}{4}x + \frac{23}{4}$$

$F(x) = g(x) - f(x)$ とおくと, (2)の計算より

$$F(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 (x - 3)$$

$x > 3$ では $F(x) < 0$ であるから, 最大値を求めるには

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$$

の範囲だけ考えればよい。

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 3) - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 \\ &= -\left(x + \frac{3}{2}\right)\left\{2(x - 3) + x + \frac{3}{2}\right\} \\ &= -3\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

x	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$		↗ 極大 ↘	

よって, $F(x)$ は $x = \frac{3}{2}$ のとき極大かつ最大であり, 求める最大値は

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2} - 3\right) = \frac{27}{2} \quad (\text{答})$$

(注) 積の微分の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

は, 数学Ⅱでは「発展」として扱われる場合もあるが, 上で見たように, 平方因数を含む微分では早く共通因数が見出せるなど利点も多いので, 使いこなせるようにしておく方が望ましい。公式を避けても計算はできるが, 面倒を増やすだけである。