

1 (辞書式順序)

- (1) 1 から 4 までの番号が書かれたボールを 1 から 4 までの番号が書かれた箱に 1 つずつ入れるとき, 箱の番号とボール番号がすべて異なる入れ方は何通りあるか。
- (2) 1 から 10 までの番号が書かれた 10 枚のカードから 3 枚を選ぶとき, カードに書かれた数の和が 13 となるのは何組あるか。

2 (和の法則・積の法則)

大小 2 個のさいころを投げるとき,

- (1) 目の和が素数となる場合は何通りあるか。
- (2) 目の積が 4 の倍数となる場合は何通りあるか。

3 (順列)

男子 5 人，女子 2 人を一列に並べるとき

- (1) 並べ方は全部で何通りあるか。
- (2) 男子が両端にくる並べ方は何通りあるか。
- (3) 女子 2 人が隣り合う並べ方は何通りあるか。
- (4) 女子の両隣が男子である並べ方は何通りあるか。
- (5) (4)のうち，特定の男女が隣り合うような並べ方は何通りあるか。

4 (円順列)

男子 5 人，女子 2 人を円形に並べるとき

- (1) 並べ方は全部で何通りあるか。
- (2) 女子 2 人が隣り合う並べ方は何通りあるか。
- (3) 女子の両隣が男子である並べ方は何通りあるか。
- (4) (3)のうち，特定の男女が隣り合うような並べ方は何通りあるか。

5 (組合せ, 同じものを含む順列)

- (1) A, A, A, B, B, C, C を一列に並べる並べ方は何通りあるか。
- (2) 正八角形 $P_1P_2P_3 \cdots P_8$ の 3 頂点を結んでできる三角形は何個あるか。
- (3) 黒石 6 個, 白石 3 個を一列に並べる並べ方は何通りあるか。

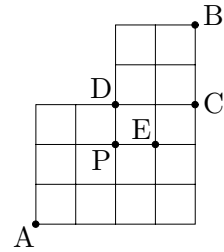
6 (重複順列, 組分け)

- (1) a, b, c の 3 品だけをメニューとするレストランで 8 人が 1 品ずつ注文するとき, 注文の仕方は何通りあるか。
- (2) (1) の注文の仕方のうち, 3 品すべてが注文されているのは何通りあるか。
- (3) 9 人を 4 人, 3 人, 2 人の組に分けるのは何通りあるか。
- (4) 9 人を 5 人, 2 人, 2 人の組に分けるのは何通りあるか。
- (5) 9 人を 3 人ずつの 3 組に分けるのは何通りあるか。

7 (経路の数)

図のような道を A から B まで遠回りしないで行くとき

- (1) C を通るのは何通りあるか。
- (2) D を通るのは何通りあるか。
- (3) E を通り, C を通らないのは何通りあるか。
- (4) 全部で何通りあるか。
- (5) P も E も通らないのは何通りあるか。



8 (重複組合せ)

- (1) $x + y + z = 9$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ。
- (2) $x + y + z = 9$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ。

9 (順列と組合せの複合)

- (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 と書かれた 7 枚のカードを, 各人が少なくとも 2 枚はもらえるように A, B, C の 3 人に配るのは何通りあるか。
- (2) 黒球 9 個と白球 2 個を一行に並べるとき, 黒球が続けて 5 個以上現れない並べ方は何通りあるか。

10 (二項定理)

- (1) $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9$ の展開式における定数項, x^3 の係数および x^4 の係数を求めよ。
- (2) 自然数 n に対して,
$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$
が成り立つことを示せ。
- (3) 自然数 n に対して, 3^n を 4 で割った余りを n を用いて表せ。

11(確率の定義)

1 から 5 までの数字を 1 つずつ書いた赤い札が 5 枚と, 1 から 7 までの数字を 1 つずつ書いた白い札が 7 枚, あわせて 12 枚の札が入った袋がある。この袋から同時に 4 枚の札を取り出す。

- (1) 4 枚の札が同じ色になる確率を求めよ。
- (2) 4 枚の札の数字が連続した数字にある確率を求めよ。
- (3) 4 枚の札が同じ色で, それらの数字が連続した数字になる確率を求めよ。

12(割合としての確率)

黒球 2 個, 白球 2 個, 赤球 1 個が入っている袋から球を 1 個取り出し, 色を確かめてから袋に戻すという試行を, 黒球を取り出すまでくり返し, 黒球を取り出したときは以後の試行を行なわない。

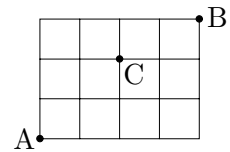
- (1) ちょうど 3 回目に終わる確率を求めよ。
- (2) 3 回目までに終わる確率を求めよ。
- (3) 3 回目までに赤球を少なくとも 1 回取り出す確率を求めよ。

13 (反復試行の確率)

- (1) さいころを 5 回ふるとき，出た目の積が 9 で割り切れて 27 で割り切れない確率を求めよ。
- (2) 立方体の 1 つの面は赤色に，別の 2 つの面は黄色に，残りの 3 つの面は青色に塗る。この立方体を 3 回投げるとき，3 つの色が出揃う確率を求めよ。
- (3) 硬貨を投げて表が出たら +1 点，裏が出たら -1 点として， n 回目までの合計点を S_n とする。硬貨を 8 回投げるとき， $S_2 \neq 0$ かつ $S_8 = 0$ となる確率を求めよ。

14 (全事象の解釈)

- (1) 図のような碁盤目状の道路を A から B まで最短経路を進む。各交差点で進むことのできる経路を等確率で選ぶ場合に点 C を通る確率 p ，A から B へのすべての経路を等確率で選ぶ場合に点 C を通る確率 q をそれぞれ求めよ。



- (2) 黒球 4 個，白球 4 個が入っている袋から，1 個ずつ球を取り出していき，黒球を 2 個取り出した時点で試行をやめる。ちょうど 4 回目で試行をやめる確率を求めよ。
- (3) (2) の試行において，4 回目で試行をやめたとき 1 回目に黒球を取り出していた確率を求めよ。

15 (数列の和と確率)

- (1) さいころを n 回ふるとき, 5 または 6 の目が出る前に 1 の目が出る確率を求めよ。
- (2) 赤球と白球を合わせて 3 個の球が入った袋から球を 1 個取り出し, (赤白いずれの球の場合も) 白球 1 個を袋に戻す操作を繰り返す。赤球 2 個, 白球 1 個が入った状態から始めて, この操作を n 回行なったとき, 袋の中に赤球がちょうど 1 個入っている確率を求めよ。

16 (確率と漸化式)

2 つの袋 A, B の中に白玉と赤玉が入っている。A から玉を 1 個取り出して B に入れ, よく混ぜたのち B から玉を 1 個取り出して A に入れる。これを 1 回の操作と数える。初めに, A の中には 3 個の白玉と 1 個の赤玉が, B の中には 2 個の白玉だけが入っていたとして, この操作を n 回繰り返したあと, 赤玉が A に入っている確率を p_n とする。

- (1) p_1 の値を求めよ。
- (2) p_{n+1} を p_n で表せ。
- (3) p_n を n で表せ。

1 確認：「場合の数・確率」の分野の基本解法は

- 1° (共通部分がないように)場合分けしたときは, 各場合の和をとる
- 2° 「それぞれに対して」のときは積をとる
- 3° それ以外の場合はただひたすら書き並べる(数える)

の3つしかないので, 小学生でもすぐに理解できる。ところが, このわかりやすさが難しさの原因なのである。

他の分野では, その分野で基本とされる概念と技巧があり, 多少努力してそれらをマスターしさえすれば, (ほとんどの大学入試の数学は)解答の道筋がつけられるようになる。しかし, 「場合の数・確率」では, そうした基本に相当するものがほとんどないために, 問題を解くその場で, 問題に応じた解法を編み出さなければならない。

本来, 「場合の数・確率」の分野は, この基本解法確認演習の趣旨には合わないが, 数え上げと計算のもととなる発想に触れる

問題に対してどのように探っていくかを考える

ことを通して, 目新しい問題に対処するヒントをこのファイルで提供したい。

本問ではまず, 場合の数を直接数える問題に取り組む。と言っても, 思いつくままにただ書き並べるだけでは, 数え間違いが起きやすい。そこで,

ある規則を設けてそれに従って順序良く並べる

ことが重要である。単語がアルファベット順に並んでいるために辞書が引きやすいことにたとえて, このような順序を辞書式順序という。(1)では箱の番号の順に, 小さい数字からボールの番号が異なるように書き並べていくとよいだろう。(2)では, 13に近い10の方から順に, 異なる3数の和が13となるように拾っていくとよいだろう。

解答:

(1) 1, 2, 3, 4の箱に入るボールの番号を順に書き並べると,

2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321

の場合だけが箱とボールの番号が異なるから, 求める数は

9通り (答)

(注) このような問題は(4の場合の)ベルヌイ・オイラーの「宛先違いの手紙の問題」と呼ばれ, 歴史的にも有名である。

(2) 和が13となる1から10までの異なる3数の組を書き並べると,

(10, 2, 1), (9, 3, 1), (8, 4, 1), (8, 3, 2),

(7, 5, 1), (7, 4, 2), (6, 5, 2), (6, 4, 3)

だけあるから,

8通り (答)

(注) 3枚のカードの数字は相異なるから, 勢い余って(9, 2, 2)などの重複するケースを入れないように。

□2 確認：事柄 A, B が同時には起こらないとき, A が a 通り, B が b 通り起こるとすれば, A または B が起こる場合の数は $a + b$ 通りである。これを和の法則という。記号を用いて表せば,

$$n(A) = a, n(B) = b, n(A \cap B) = 0 \implies n(A \cup B) = a + b$$

となる。一般には,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立つので和の法則など不要に思えるが,

いくつかに分けて数えるときは, 共通部分がないように場合分けするのが良い, と示唆していることが重要である。

共通部分がないように場合分けするには

一つの条件 P について, P であるかないかで場合分けする
基準となる数量について場合分けする

ことがコツである。

事柄 A が a 通り起こり, そのおのおのについて事柄 B が b 通りずつ起こるとすれば, A と B がともに起こる場合の数は ab である。これを積の法則という。

- (1) 2 個のさいころの目の和について 2, 3, 5, 7, 11 の場合に分けて, それぞれの場合に □1 と同じ要領で起こり得る場合を列挙していく。考え方としては, 和の法則により集計することになるが, 本問では通しで書き並べて数えるのと変わらない。
- (2) 4 は素数ではないので, 単純に 4 の倍数の目を含むかどうかだけでは正しく数えられない。 $4 = 2^2$ に注目して, 偶数の目がいくつ含まれるかで場合分けする。

解答：

- (1) 2 個のさいころの目の和が素数となる出方は

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)

であるから, これを数えて

15 通り (答)

- (2) さいころの目の積が 4 の倍数となるのは

(i) 1 個が 4 の目, もう 1 個が奇数の目

(ii) 2 個とも偶数の目

のいずれかの場合であるから, 求める数は

$(1 \times 3) \times 2 + 3 \times 3 = 15$ 通り (答)

3 確認：いくつかのものを，順序をつけて一列に並べた配列を順列という。異なる n 個のものから r 個のものを取り出して並べる順列の数を ${}_n P_r$ で表す。

1, 2, ..., n から r 個取り出して並べたものを $p_1 p_2 \cdots p_r$ とすると， p_1 の選び方が n 通り，そのそれぞれに対して p_2 の選び方が p_1 以外の $n-1$ 通り，それぞれに対して p_3 の選び方が $n-2$ 通り，... と続けて

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

であることがわかる。特に， $r = n$ のときは

$$n! = {}_n P_n$$

と書いて， n の階乗という。この記号を用いると

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

${}_n P_n = 1$ とつじつまが合うように，

$$0! = 1$$

と定める。ただし，これは高校数学の範囲および組合せ論を前提とする場合のことで，(大学の)専門分野によっては別の定義もあり得るので，定義の経緯も理解しておこう。

実際に問題を解く場面では，条件を満たすように並べるにはどのような手順をとればよいかを考えることになるので， ${}_n P_r$ を用いるよりは直接かけ算で表す方が実用的である。また，階乗の値については 7! までは覚えておく方が便利である。

解答：

(1) $7! = 5040$ 通り (答)

(2) まず男子 2 人を両端に配置してから，その間に残りの 5 人を並べると考えて

$$5 \times 4 \times 5! = 2400 \text{ 通り (答)}$$

(3) 女子 2 人の並び方を決めた上で，女子 2 人を 1 人とみなして数えると

$$2 \times 6! = 1440 \text{ 通り (答)}$$

(4) まず男子 5 人を一列に並べ，その隙間 4ヶ所に女子を別々に入れると考えると

$$5! \times (4 \times 3) = 1440 \text{ 通り (答)}$$

(5) まず特定の男女以外の男子 4 人を一列に並べる。次に，特定の男女の並び方は，端にくるのが 1 通り，間にくるのが 2 通りであり，もう 1 人の女子が入れる隙間はそれぞれ 3ヶ所ずつあるから，

$$4! \times (1 \times 2 + 2 \times 3) \times 3 = 576 \text{ 通り (答)}$$

(注)

1° (4)では，女子が端にくることはないので，「女子 2 人が隣り合わない」並べ方とは異なる。

2° (5)に登場する「特定の男女」は，並べ方を考える前に定まっているから「特定」なのであり，並べ始めてから「どの 2 人を特定するか」という意味ではない。

4 確認：いくつかのものを円形に並べる配列を円順列という。何が問題になるかと言えば、一つずつ位置がずれても同じ並び方となることである。

円順列の個数を求めるには、1つのものを固定して、一列に並べた順列に題意を書き換えて解くことになる。というのも、直接式に表せるのはかけ算(通常の順列)とたし算(場合分け)しかないからである。一列に並べた順列へ題意を書き換える際に、任意の1つを固定することはできるが、2つ以上のものを固定することはできないので、(4)のような設定では注意が必要である。

解答：

(1) 1人を固定すると、6人を一列に並べる順列と考えられるから、

$$6! = 720 \text{ 通り (答)}$$

(2) 男子1人を固定すると、男子4人と女子2人を女子2人が隣り合うように一列に並べる順列とみなすことができ、

$$2 \times 5! = 240 \text{ 通り (答)}$$

(別法) 女子1人を固定すると、男子5人と女子1人を女子が端にくるように一列に並べる順列とみなすことができる。(式は同じ)

(3) 男子1人を固定すると、男子4人と女子2人を女子が隣り合わないように一列に並べる順列とみなせるから、男子4人を並べたあとその両端と隙間5ヶ所に女子を別々に入れると考えると

$$4! \times (5 \times 4) = 480 \text{ 通り (答)}$$

(4) 「特定の男女」のうちの1人の男子を固定して、残り6人を一列に並べる順列とみなすとき、相方の女子が端にきて、もう1人の女子がそれと隣り合わない4ヶ所のどこかに入るから、

$$2 \times 4! \times 4 = 192 \text{ 通り (答)}$$

5 確認： n 個の異なるものの中から r 個を取り出して(順序は考えずに) 1 組にしたものを, n 個のものから r 個を取り出す組合せといい, その組合せの総数を ${}_n C_r$ で表す。組合せは直接式では表現できないので, r 個を一列に並べた順列を求めて, r 個の並び方から生じる重複度で割ると考えて

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

と導かれる。(1)のような「同じものを含む順列」の場合は, 組合せを導くときの「順列を重複度で割る」という基本に戻って考える。 ${}_n P_n$ のときと同様,

$$0! = 1$$

と定めることにより ${}_n C_n = 1$ が成り立ち, 実感と合致する。

組合せとは「いくつかのものを選ぶ」という印象が強いが, 見方を変えると「選ぶものと残すものの 2 種類に分ける」ことを意味する。したがって, 本問(3)や 7 のような二項分布的なものは組合せとみることができる。

解答:

(1) まず異なる 7 個の文字を一列に並び方を数え, AAA の重複度, BB の重複度, CC の重複度でそれぞれ割ると考えれば, 求める場合の数は

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ 通り (答)}$$

(2) 正八角形の 8 個の頂点 P_1, P_2, \dots, P_8 は一つの円周上にあり, どの 3 点も同一直線上にない。したがって, 題意の三角形の個数は 8 個の頂点から 3 個を選ぶ組合せの数と等しく,

$${}_8 C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \text{ 個 (答)}$$

(3) 9 個の置き場所のうち 3 個の白石の置き場所が決まればすべての並び方が決まるから, 求める場合の数は

$${}_9 C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \text{ 通り (答)}$$

(注) (1), (3)では重複度で割っているが, “6 個の”黒石などというからには, 異なっているものを並べているとも解釈できる。実は, こうした場合の数では, 「どのように観測されるか」で同じ場合かどうかを判断する。それに比べて, 確率(→ 11 ~)では「実際に何が起きているか」で同様に確からしいかどうかを考える。

〔6〕 確認：異なる n 個のものから重複を許して r 個取り出す順列を重複順列といい、その個数は n^r である。 n 通りの選択肢が用意されていることを r 回くり返すような場合(→ (1)) をイメージすればよい。

本問のもう一つのテーマは「組分け」である。名前がついた組への分け方は重複順列を用いて計算され、個数や人数の配分で定まる組への分け方は組合せを用いて計算される。(1), (2)では表向きは組分けの問題ではないが、 a, b, c の 3 品を A, B, C の 3 部屋に変えると、固定された組への組分けの問題と見ることができる。

組に名前をつけずに分けるとき、(4), (5)のような同人数の組を含む場合には注意が必要である。組合せにおける重複度の解消は組の中での話であり、〔3〕で確認したように単純な積は順列の数を表しているの、どの組から順に定まるかは順列である。例えば、A, B, C, D の 4 人を 2 人ずつに分ける場合、4 人から A, B を選ぶ場合と C, D を選ぶ場合は ${}_4C_2$ 通りの中では別の場合であるが、組分けとしては同じ分け方である。そこで、同人数の組がある場合はこの重複を解消しなければならない。一方、(3)のように組の人数がすべて異なる場合は、このような重複は生じない。

解答：

(1) 8 人のそれぞれに 3 通りずつの選択肢があるから、注文の仕方は

$$3^8 = 6561 \text{ 通り (答)}$$

(2) 3 品のうちちょうど 2 品が注文されているのは

$${}_3C_2 \times (2^8 - 2) = 3 \times 254 = 762 \text{ 通り}$$

8 人全員が同じ品を注文するのは 3 通りであるから、以上を全体から引いて

$$6561 - (762 + 3) = 5796 \text{ 通り (答)}$$

(3) 9 人を 4 人, 3 人, 2 人の組に分けるのは

$${}_9C_2 \times {}_7C_3 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 1260 \text{ 通り (答)}$$

(4) 9 人を 5 人, 2 人, 2 人の組に分けるのは

$${}_9C_5 \times \frac{{}_4C_2}{2} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 2} = 378 \text{ 通り (答)}$$

(5) 9 人を 3 人ずつの 3 組に分けるのは

$$\frac{{}_9C_3 \times {}_6C_3}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{(3!)^3} = 280 \text{ 通り (答)}$$

7 確認：経路の数を数えるには，次のように考えればよい。

- 1° 2種類のを一列に並べる順列と解釈する
- 2° 同じ時刻に通過する点ごとに本数を集計する

本問で A から C へ遠回りをしないで行くとは，右行き 4 区間と上行き 3 区間の移動で C に到達するという意味である。したがって，A から C へ行く経路は，例えば
右右上上右

のように 2 種類の文字を並べた順列として表現できるので，5 (3) の要領で経路の数を求めることができる。

ところが，2 種類の文字を並べた順列として計算できるのは，A から C へ行くように碁盤目状(中抜きのない長方形)で対角線の両端を結ぶ経路を数える場合のときで，A から B へ行くように L 字型の街路を進む場合には適用できない。そこで，L 字の角にあたる 3 点 D, E, F (F は E の右下の点) が，A から B への経路において

- (i) いずれかを必ず通る
- (ii) どの 2 点も両方通れない
- (iii) それぞれの点が A から B からも長方形の対角線の対点

という性格をもつので，D, E, F の各点ごとに経路の数を集計すれば，A から B への経路の総数がうまく数えられる。

解答：

(1) A から C への経路は $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow$ を一列に並べる
ことによって表現できるから 7C_3 通りあり，C から B への
経路はただ一つであるから，C を通る経路は

$${}^7C_3 \times 1 = 35 \text{ 通り (答)}$$

(2) (1) と同様に考えて，A から D への経路は 5C_2 通り，D
から B への経路は 4C_2 通りであるから，D を通る経路は

$${}^5C_2 \times {}^4C_2 = 10 \times 6 = 60 \text{ 通り (答)}$$

(3) 図のように点 X を定めると，E を通り C を通らない経路は E と X を通る経路の
ことであり，(2) と同様に考えて

$${}^5C_2 \times 1 \times 2 = 20 \text{ 通り (答)}$$

(4) 図のように点 F を定めると，A から B への経路は D, E, F のいずれか 1 つだけ
を必ず通る。D を通る経路は(1)より 60 通り，E を通る経路は

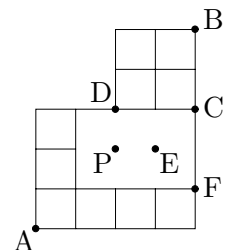
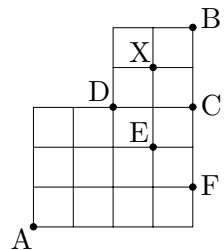
$${}^5C_2 \times 4 = 40 \text{ 通り}$$

F を通る経路は 5 通りであるから，経路の総数は

$$60 + 40 + 5 = 105 \text{ 通り (答)}$$

(5) P, E と隣り合う交差点を結ぶ道を除くと右図のよう
になるから，D を通る場合と F を通る場合に分けて考える
ことにより，P も E も通らない経路は

$$4 \times {}^4C_2 + 5 \times 1 = 29 \text{ 通り (答)}$$



8 確認： n 種の異なるものから繰り返しを許して r 個を取り出す(取り出さない種類があってもよい)組合せを重複組合せという。構造的には

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \cdots, \quad x_n \geq 0$$

を満たす整数解の組を考えるのと同じである。この整数解 (x_1, x_2, \cdots, x_n) は $n-1$ 個の仕切りと r 個の(区別のつかない)ものを並べて表現できる。例えば, $x+y+z=9$ の解 $(4, 3, 2)$, $(4, 0, 5)$, $(9, 0, 0)$ はそれぞれ

$$\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \\ \bigcirc \bigcirc \bigcirc || \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \\ \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc || \end{array}$$

と表される。したがって、重複組合せは、区別のつかない仕切りともものを並べるとみなすことで、2種類のを並べる順列 (\rightarrow 5(3)) に帰着させられる。 n 種類から r 個を取り出す重複組合せを記号で ${}_n H_r$ と書いて公式化されているが、そのような公式は試験場ではあまり役に立たない。上に述べた表現に置き換える方法を身につけよう。

解答：

(1) $x+y+z=9$ の非負整数解 (x, y, z) は、区別のつかない9個のものと2個の仕切りを一行に並べることで表現できるから、その解の個数は

$${}_{9+2} C_2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55 \text{ 個 (答)}$$

(2) $x+y+z=9$ の正の整数解 (x, y, z) は、まず区別のつかない9個のものを一行に並べ、その隙間8ヶ所のうちの2箇所に仕切りを入れることで表現できるから、その解の個数は

$${}_{9-1} C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28 \text{ 個 (答)}$$

9 確認：初めて出会う設定をその場で考えるという場面が多いこの分野では、複数の条件が絡んでいるとしばしば困難を感じる。そこで、本問のように直接の条件を満たす組とその並べ方が複合している場合は、組分けの仕方と並べ方の順列とを分けて考えることにし、組分けの考察の段階では並び順の重複を含まないように注意する。

(1)では、まず7枚のカードを3枚、2枚、2枚の3組に分けて(→6)(3)~(5)から、A, B, Cにどの組のカードを与えるか(並べ方)を考える。

(2)では、「黒球が続けて5個以上現れない」という条件があるため、5(3)のように単純には計算できない。9個を4個以下の3つの組に分ける個数の配分をまず考え、個数が異なる組についてその並べ方が何通りあるかを計算する。(2個の白球が隣り合うと題意を満たさない。)

解答：

(1) 7枚のカードを3枚、2枚、2枚の3組に分ける分け方は

$${}_7C_3 \cdot \frac{{}_4C_2}{2!} = 35 \times 3 = 105$$

通りあり、それぞれの組分けに対してどの順でA, B, Cに与えるかを考えて

$$105 \times 3! = 630 \text{ 通り (答)}$$

(2) (区別のつかない)9個の黒球を4個以下の3組に分けるのは、

$$4 + 4 + 1, 4 + 3 + 2, 3 + 3 + 3$$

の3通りがある。それぞれ並べ方は

$$4 \text{ 個}, 4 \text{ 個}, 1 \text{ 個のとき } 3 \text{ 通り}$$

$$4 \text{ 個}, 3 \text{ 個}, 2 \text{ 個のとき } 3! = 6 \text{ 通り}$$

$$3 \text{ 個}, 3 \text{ 個}, 3 \text{ 個のとき } 1 \text{ 通り}$$

であるから、求める場合の数は

$$3 + 6 + 1 = 10 \text{ 通り (答)}$$

(注) (1)では、(カードの組分けではなく)枚数の配分で場合分けして、

$$A: 3 \text{ 枚}, B: 2 \text{ 枚}, C: 2 \text{ 枚のとき } {}_7C_3 \cdot {}_4C_2 = 35 \times 6 = 210 \text{ 通り}$$

$$A: 2 \text{ 枚}, B: 3 \text{ 枚}, C: 2 \text{ 枚のとき } {}_7C_2 \cdot {}_5C_3 = 21 \times 10 = 210 \text{ 通り}$$

$$A: 2 \text{ 枚}, B: 2 \text{ 枚}, C: 3 \text{ 枚のとき } {}_7C_2 \cdot {}_5C_2 = 21 \times 10 = 210 \text{ 通り}$$

以上あわせて

$$210 + 210 + 210 = 630 \text{ 通り}$$

としても求められる。上の解答と見方は異なるが、「複合する条件を分けて考える」という基本は同じである。

10 確認：式を展開するとは、各因数から1つずつ項を選んでかけ合わせ(て同類項をまとめ)ることであるから、 $(a+b)^n$ (n は自然数) を展開したとき、 $a^k b^{n-k}$ の項は n 個の $a+b$ のうち k 個からは a を選び、 $n-k$ 個からは b を選んだ積として得られる。その選び方は ${}_n C_k = {}_n C_{n-k}$ 通りあるから、展開式は明らかに

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^{n-k} b^k$$

となる。この二項係数についての関係式が成り立つことを二項定理という。

解答：

(1) 二項定理を用いて展開すると、

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 {}_9 C_k x^{9-k} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^9 {}_9 C_k (-2)^k x^{9-3k}$$

定数項は 0 次の項のことで、 $9-3k=0$ とおくと $k=3$ であるから、

$$\text{定数項は } {}_9 C_3 (-2)^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times (-8) = -672 \quad (\text{答})$$

$9-3k=3$ とおくと $k=2$ であるから、

$$x^3 \text{ の係数は } {}_9 C_2 (-2)^2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \times 4 = 144 \quad (\text{答})$$

$9-3k=4$ ($0 \leq k \leq 9$) を満たす整数 k は存在しないから、

$$x^4 \text{ の係数は } 0 \quad (\text{答})$$

(注) $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 {}_9 C_k x^k \left(-\frac{2}{x^2}\right)^{9-k}$ と展開してもよいが、 ${}_9 C_k = {}_9 C_{9-k}$ である

ことを活用して、処理しやすい方を採用するとよい。

(2) 二項定理より

$${}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_n x^n = (1+x)^n$$

となるから、 $x=1$ を代入して

$${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n = 2^n \quad (\text{おわり})$$

(注) 本問に限っては二項定理に頼らず、 n 人を A, B の部屋に振り分ける方法を 2 通りに数えて直接導くこともできる。

(3) 二項定理より

$$3^n = (4-1)^n = \sum_{k=1}^n {}_n C_k 4^{n-k} (-1)^k = (4 \text{ の倍数}) + (-1)^n$$

であるから、 3^n を 4 で割った余りは

$$n \text{ が偶数のとき } 1, \quad n \text{ が奇数のとき } 3 \quad (\text{答})$$

(注) n が奇数のときの余りをうっかり -1 としないように。

11 確認：結果が人為的意図に左右されない実験や観察のことを試行といい、試行の結果として起こる事柄を事象という。さらに細かく分けることができないような最小単位の事象を根元事象といい、ある試行において起こりうるすべてを表す事象を全事象という。例えば、1個のさいころを1回だけふるとき、このさいころをふるという行為が試行であり、出る目すべてを表す $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ が全事象、 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ の一つ一つが根元事象である。

いくつかの事象がいずれも同程度に起こることが期待されるとき、これらの事象は同様に確からしいという。各根元事象が同様に確からしい試行において、事象 A の全事象に対する割合 $P(A)$ を事象 A の起こる確率という。(試行が離散的で)各事象の場合の数が数えられるときは

$$P(A) = \frac{(\text{事象 } A \text{ が起こる場合の数})}{(\text{全事象の場合の数})}$$

が定義である。

確率は分数値であるから、約分できるときは先に約分しておくこと、計算の見通しが少し良くなる。

解答：12枚の札から4枚を取り出す ${}_{12}C_4$ 通りを全事象として考える。

(1) 赤い札4枚の場合と白い札4枚の場合に分けて、4枚の札が同じ色になる確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_5C_4 + {}_7C_4}{{}_{12}C_4} &= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 + 7 \times 6 \times 5 \times 4}{12 \times 11 \times 10 \times 9} \\ &= \frac{1 + 7}{11 \times 9} \\ &= \frac{8}{99} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 連続する4つの数字がすべて5以下の場合、 $\{6, 5, 4, 3\}$ の場合、 $\{7, 6, 5, 4\}$ の場合に分けて考え、5以下の数字については2枚ずつあることに注意すると、数字が連続する確率は

$$\frac{2^4 \times 2 + 2^3 + 2^2}{{}_{12}C_4} = \frac{32 + 8 + 4}{11 \times 5 \times 9} = \frac{4}{45} \quad (\text{答})$$

(3) 4枚の札が同じ色で連続する数字になるのは、 $\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}$ の場合は赤白の2通りずつで、 $\{3, 4, 5, 6\}, \{4, 5, 6, 7\}$ の場合は白のみ1通りずつであるから、確率は

$$\frac{2 \times 2 + 1 \times 2}{{}_{12}C_4} = \frac{6}{11 \times 5 \times 9} = \frac{2}{165} \quad (\text{答})$$

12 確認：場合の数の比では確率が求められない例として，
 頻度や濃度のような連続量(としての確率)を扱う
 中断を含む試行のように事象間の関係が場合の数で表現できない
 という場合がある。このようなときには，確率が全事象に対する割合であることより
 「割合」のもつ演算法則により基礎の確率から新しい確率を求める
 手法をとる。簡単に言えば，確率をかけ算・たし算して答を求めようというのである。
 場合の数について，一般に

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立つので，全事象の場合の数を共通の分母として，確率についてもそのまま

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成り立つと考えられる。

2つの事象 A, B が $A \cap B = \phi$ を満たすとき， A と B は互いに排反であるといい，
 A と B が互いに排反ならば， $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 排反の特別なケースとして，全事象 U の中の事象 A に対して A が起こらないという
 事象を A の余事象といい， \bar{A} で表す。 $P(U) = 1$ であるから，

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

A のもとで B が起こる確率を $P_A(B)$ と記号で表すことにすると，

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

が成り立つ。 $P_A(B)$, $P_B(A)$ を条件つき確率などと言い出すと難しい話のように思
 えてしまうが，ここでは「割合」のもつ積の法則と軽く考えたい。

2つの試行が，互いに他方の結果に影響を及ぼさないとき，その2つの試行は互い
 に独立であるという。ここで注意したいのは，独立であるかどうかは，試行の操作手
 順が他方に依存しているかどうかは関係なく，(確率の値などの)結果だけで判断され
 るという点である。事象 A, B のもととなる試行が互いに独立であるとき，

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (P_A(B) = P(B), P_B(A) = P(A))$$

が成り立つ。

教科書ではこれらを公式として扱っているが，実際に問題を解くときには，題意の
 設定を理解する中で式の成り立ちを判断する方が自然で現実的である。

解答：

- (1) 3回目に終わるのは、1回目と2回目とともに白球または赤球を取り出し、3回目に黒球を取り出す場合であるから、その確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{18}{125} \quad (\text{答})$$

- (2) 4回以上試行が行なわれるのは、3回目までは白球と赤球が取り出される場合であるから、その余事象の確率を求めて

$$1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{125 - 27}{125} = \frac{98}{125} \quad (\text{答})$$

- (3) 3回目までに赤球を少なくとも1回取り出すのは、

(i) 1回目に赤球を取り出す

(ii) 1回目に白球を取り出し、2回目に赤球を取り出す

(iii) 1回目、2回目に白球を取り出し、3回目に赤球を取り出す

のいずれかの場合であるから、求める確率は

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{25 + 10 + 4}{125} = \frac{39}{125} \quad (\text{答})$$

(注)

1° (2)では、終わりの回で場合分けして、

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} = \frac{50 + 30 + 18}{125} = \frac{98}{125}$$

と求めてもよい。

2° (3)では、「はじめて赤球を取り出すのが何回目であるか」で場合分けしている。本問ではすべての試行の回数が同じというわけではないので、赤球が出る回数で場合分けするのは得策ではない。試行の回数が固定されている反復試行(→13)では、逆に回数に注目するのが題意の把握のポイントとなる。

13 確認：同じ試行を何回か繰り返すような試行を反復試行という。反復試行は、各回が同じ試行である(確率が一定)であることから、各回の試行は独立である。

一般の試行に対する確率を求める際は、互いに排反な事象に場合分けして各事象の確率をそれぞれ求めてたし合わせるのがふつうである。反復試行の場合は、一つの条件に対する根元事象はすべて等確率であるから、一つの根元事象の確率に根元事象の個数をかけることにより計算できる。例えば、1個のさいころを3回投げて1の目が1回だけ出る確率を考えると、1の目を○、1以外の目を×で表して

$$\bigcirc \times \times \text{ と出る確率は } \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

$$\times \bigcirc \times \text{ と出る確率は } \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

$$\times \times \bigcirc \text{ と出る確率は } \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

となるので、一般の確率の求め方ではこれらをたし合わせて

$$\frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$$

と求めることになる。ところが、さいころを繰り返し投げるのは反復試行であり、1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ 、1以外の目が出る確率が $\frac{5}{6}$ となることはどの回でも同じであり、

3回のどの出方も等確率となる。この構造を理解し、根元事象の個数さえ求めれば、

$$3 \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^2$$

と確率を求めることができる。

教科書では、(1)のような2項分布の場合だけを反復試行と呼んでいるが、今述べたことが反復試行の趣旨なので、(2)のように各回が3種類の場合でも同じように考えられる。もちろん、(2)のような一般の場合は、公式 ${}_n C_r p^r (1-p)^{n-r}$ や次に述べるダイアグラムによる解法は適用できないので、基本に戻って考えなければならない。教科書の記述は、本質的な理解を妨げようとしている気がしてならない。

碁盤目状の道路において、各交差点ごとに一定の確率で道を選ぶことを繰り返して進んでいく試行(と同じもの)をランダムウォークという。ランダムウォークは反復試行の一種であるが、一般の設定では場合分けが多すぎるので、選択回数を3~4回にとどめた単純考察の問題に限られる。重要なのは、選択肢が毎回2つの場合である。

(3)のような(選択肢が毎回2種類に限定された)ランダムウォークの問題では、解答のように、起こり得る根元事象をダイアグラムで表現して経路を数える問題(→7)に帰着させることができる。このタイプは試行回数が多いものもよく出題されており、解法を知らずに根性だけで解くのは大変である。本問を通してマスターしておこう。ちなみに、ダイアグラムとは縦線と横線が絡むような図式のことを指し、◇の形が現れることからそう呼ばれている。鉄道の時刻表の総称がダイヤと呼ばれるのも、列車の運行を表す図式がダイアグラムになるからである。

解答：

- (1) 出た目の積が 9 で割り切れて 27 で割り切れないのは、3 または 6 の目がちょうど 2 回出ることであるから、その確率は

$${}^5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} \quad (\text{答})$$

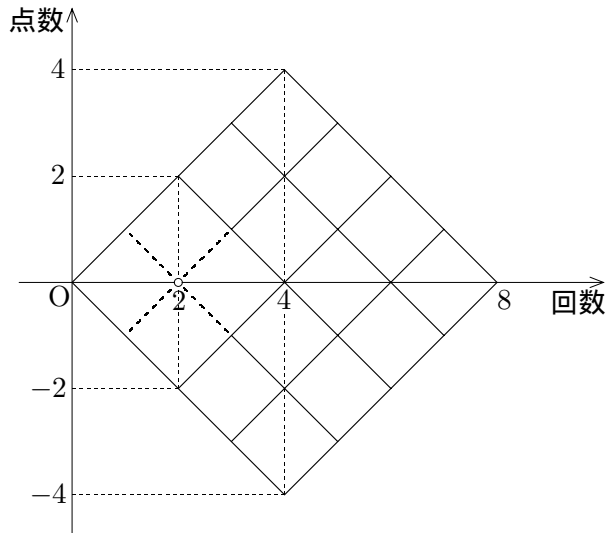
- (2) 立方体を 3 回投げて 3 つの色が出揃う根元事象は、確率がすべて

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

であり、3 つの色の出方は 3! 通りあるから、求める確率は

$$3! \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

- (3) $S_2 \neq 0$ かつ $S_8 = 0$ となる根元事象をダイアグラムで表すと、



2 回目に 2 点となる場合と -2 点となる場合に分けて考えて、求める確率は

$$({}_6C_2 + {}_6C_4) \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{15 + 15}{2^8} = \frac{15}{128} \quad (\text{答})$$

14 確認：一見同じ事象を指しているように見えても，何を全事象としているか(何を同様に確からしいとしているか)によって，当然確率の値は変わってくる。

(1) p は交差点での選択肢が同様に確からしいと考えた確率であり，碁盤目状の道路が十分続くと仮定したとき， 2^4 通りのうち点 C に辿り着く比率のことである。

q は A から B に至る経路の選び方が同様に確からしいと考えた確率であり，A から B に至る全経路のうち C を通るものの比率のことである。

(2) 問題文では黒球を 2 個取り出した時点で試行をやめることになっているが，黒球を 2 個取り出したあとも試行を続け，8 個の球をすべて取り出すときの確率と考えると式が立てやすい。

(3) 一見「1 回目と 4 回目に黒球を取り出す確率」のように思えるが，4 回目で試行を終わる場合を全事象とみた確率が求めるものである。いわゆる条件つき確率であるが，実は通常の問題もすべて条件つき確率だと言えるので，ここでことさら強調する必要はない。用語に振り回されるのではなく，「何を全事象とみるときの確率なのか」をきちんと考えるようにしよう。

解答：

(1) 各交差点で経路を等確率で選ぶ場合，点 C に辿り着くまでに 4 回経路を選択することになり，点 C に辿り着く経路は ${}_4C_2$ 通りあるから，

$$p = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8} \quad (\text{答})$$

A から B へのすべての経路のうち C を通るものの比率が q であるから，

$$q = \frac{{}_4C_2 \times 3}{{}_7C_3} = \frac{18}{35} \quad (\text{答})$$

(2) 求める確率は，黒球 4 個と白球 4 個を一列に並べるとき，2 個目の黒球が 4 個目にある確率と同じことである。2 個目の黒球が 4 個目となる黒白の配列は(3 個目までは 1 個だけが黒球，5 個目から 8 個目まではちょうど 2 個が黒球であるから)

$$3 \times {}_4C_2 = 18 \text{ 通り}$$

であり，求める確率は

$$\frac{18 \times 4!4!}{8!} = \frac{9}{35} \quad (\text{答})$$

(3) 4 回目に試行をやめたとき 1 回目に黒球を取り出していた確率は，

$$\frac{{}_4C_2 \times 4!4!}{3 \times {}_4C_2 \times 4!4!} = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

15 確認：中学校で文字式を習って以来，本質的に同じである多数の考察を（文字で代用して）一度にまとめてできるようになった。例えば，方程式の解を求める場合，無限にある数を片っ端から代入して探すのではなく，解を x とでもおいて値 x についての計算だけで答を出すことが可能になったわけである。

確率の問題でも，本問のように n 回の試行を考える場合にはそのような発想が必要で， k 番目の確率を自分で設定するという考え方がポイントとなる。また，このような場面では，数列の解法を活用することでさらに簡単に処理することができる。

(1)では「 $k-1$ 回めまでは 2, 3, 4 の目が出続けて k 回めに 1 の目が出る確率 p_k を求める」ことが直接的な題意で，（ k が異なれば互いに排反であるから） $\sum_{k=1}^n p_k$ が求める確率である。なお， p_1 は 1 回めに 1 の目が出る確率のことである。

(2)では， n 回の操作後に赤球が 1 個だけ残っているのは， n 回のうち 1 回だけ赤球を取り出した場合であるから，何を k 番目の確率にとればよいかと言えば …。(1)と違って，途中で赤球を取り出すと各回の確率が変わることには注意する。

数列の基本については，基本解法確認演習「数列」で確認してほしい。

解答：

(1) k 回めに 1 の目が出て，それまでに 5, 6 の目が出ない確率を p_k とすると，

$$p_1 = \frac{1}{6}$$

であり， $2 \leq k \leq n$ のときは $k-1$ 回めまでは 2, 3, 4 のいずれかの目が出続け， k 回めに 1 の目が出る確率のことであるから，

$$p_k = \left(\frac{3}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad (k=1 \text{ のときも成立})$$

k の値が異なる事象は互いに排反であるから，求める確率は p_k の総和であり，

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{\frac{1}{6} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad (\text{答})$$

(2) n 回のうち k 回目だけ赤球を取り出す確率を q_k とすれば，

$$q_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad (k=1 \text{ のときも成立})$$

k の値が異なる事象は互いに排反であるから，求める確率は q_k の総和であり，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n q_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

16 確認：試行の手順が一定のときには，試行の回数が一般の n であっても，漸化式を立てて解くことで確率(や場合の数)を求めることができる。漸化式を立てるコツは，

1° 結末から逆にさかのぼって題意の構造をとらえ，

2° p_n を既知として確率 p_{n+1} を求める式を書く

ことである。1° はちょっとした発想の転換であり，樹形図をかくつもりで考えると際限なく場合分けが増えるが，結末からさかのぼれば，注目している事象に向かう場合だけに絞れるのがポイントである。2° は実際に式を立てる作業のことであり， p_2 を求めるつもりで確率を求める式を書くと，それがそのまま漸化式になるはずである。

漸化式さえ立てば，機械的に解くことで確率(または場合の数)は求められる。

解答：

(1) A から赤玉を取り出して B から再びその赤玉を取り出す場合と A から白玉を取り出す場合に分けて考えて

$$p_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1+9}{12} = \frac{5}{6} \quad (\text{答})$$

(2) $n+1$ 回の操作のあとに赤玉が A に入っているのは，

(i) n 回目に赤玉は A に入っていて，確率 p_1 で再び A に入る

(ii) n 回目に赤玉は B に入っていて， $\frac{1}{3}$ の確率で A に移る

のいずれかであるから，

$$p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3} \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(3) (1)かつ(2)を満たす漸化式を解いて p_n を求めればよい。

$$p_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(p_n - \alpha)$$

とおくと， α は

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

の解 $\alpha = \frac{2}{3}$ であるから， $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{2}{3}\right)$$

よって， $\left\{p_n - \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (\text{答})$$

(注) 漸化式の解法は，基本解法確認演習「数列」で確認してほしい。