

## 1 (2次関数のグラフ)

2次関数  $y = 2x^2 - 6x - 4$  のグラフを  $C$  とする。

- (1)  $y = 2x^2$  のグラフをどのように移動すると  $C$  になるか。
- (2)  $C$  を描け。

## 2 (2次関数の決定)

グラフが次の条件を満たすような2次関数をそれぞれ求めよ。

- (1) 2点  $(1, 8)$ ,  $(4, 2)$  を通り,  $x$  軸に接する。
- (2) 3点  $(-2, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, -8)$  を通る。
- (3) 3点  $(-1, -5)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 7)$  を通る。

## 3 (2次関数の最大・最小)

2次関数  $f(x) = x^2 + kx - k$  ( $k$  は実数) について

- (1)  $0 \leq x \leq 2$  における最小値  $m(k)$  を求めよ。
- (2)  $0 \leq x \leq 2$  における最大値  $M(k)$  を求めよ。

## 4 (2次方程式の解の公式)

- (1) 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解が  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  であることを導け。
- (2) 2次方程式  $2x^2 - 10x - 1 = 0$  を解け。
- (3) 2次式  $2x^2 - 10x - 1$  を因数分解せよ。

## 5 (2次不等式の解)

次の不等式を満たす  $x$  の範囲を求めよ。

- (1)  $x^2 - 2x - 1 > 0$
- (2)  $x^2 - 2x + 1 > 0$
- (3)  $x^2 - (a^2 + a)x + a^3 < 0$  ( $a$  は定数)

## 6 (2次不等式の成立条件)

2次不等式  $2ax^2 + 2bx + 1 \leq 0$  について

- (1) 解が  $x \leq -\frac{1}{2}$  または  $x \geq 3$  となるような  $a, b$  の値を求めよ。
- (2) 解をもたないような  $a, b$  の条件を求めよ。

## 7 (解と係数の関係)

2次方程式  $x^2 - 2(a+1)x + a + 3 = 0$  について考える。

- (1) 相異なる2つの正の解をもつための  $a$  の範囲を求めよ。
- (2) 1つの解がもう1つの解の5倍となるような  $a$  の値を求めよ。
- (3) 2解がともに整数となるような  $a$  の値を求めよ。

## 8 (解の配置問題)

2次方程式  $x^2 - (a-2)x + \frac{a}{2} + 5 = 0$  の2解がともに  $1 < x < 5$  の範囲にあるような  $a$  の範囲を求めよ。

9 (実数解の存在条件)

2次方程式  $x^2 - (a - 2)x + \frac{a}{2} + 5 = 0$  が  $1 < x < 5$  の範囲に解をもつような  $a$  の範囲を求めよ。

10 (関数の値域)

次の  $x$  の関数の値域 ( $y$  がとり得る値の範囲) を求めよ。

$$(1) y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

$$(2) y = x + \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

1 確認：2次関数  $y = ax^2$  を  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動したグラフは

$$y = a(x - p)^2 + q$$

で表される。これは、平行移動後のグラフ上の任意の点  $(x, y)$  に対して、平行移動する前の点  $(x - p, y - q)$  が  $Y = aX^2$  の形の式を満たすことを意味する。このように、頂点の座標がわかる式表示を(2次関数の)標準形という。

一般の2次関数の表示  $y = ax^2 + bx + c$  を標準形に直すには、公式

$$(x - p)^2 = x^2 - 2px + p^2$$

を用いて平方完成すればよい。

実際にグラフを描くときは、平行移動させることはできないので、頂点  $(p, q)$  を原点とする新しい座標系で  $y = ax^2$  を描くと考える。

解答：

$$(1) \quad 2x^2 - 6x - 4 = 2(x^2 - 3x) - 4 = 2\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} - 4 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{2}$$

より、題意の2次関数の標準形は

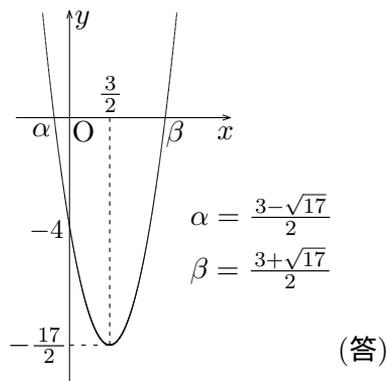
$$y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{2}$$

であるから、 $y = 2x^2$  のグラフを

$$x \text{ 軸方向に } \frac{3}{2}, \quad y \text{ 軸方向に } -\frac{17}{2} \text{ だけ平行移動 (答)}$$

したものである。

(2) (1)で導いた標準形をもとに、 $y = 2x^2 - 6x - 4$  のグラフは



(注)  $x$  切片  $\alpha, \beta$  は2次方程式  $2x^2 - 6x - 4 = 0$  の2解である。→ 4

2 確認：2次関数を求めるには，標準形

$$y = a(x - p)^2 + q$$

を文字において条件を適用し，未知数についての連立方程式を導くのが一般的である。グラフを描くわけでもないのに標準形にこだわるのは，その式の形自体が条件を端的に表すからである。例外的に， $x$ 切片がすべて既知のときは，整式の性質を活かして

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

とおく方が解きやすい。また，通る3点が与えられている場合はどのように文字設定しても解くことができるが，

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくと，条件を適用したあとの連立方程式が一次方程式になって計算しやすい。

解答：

(1)  $x$ 軸に接するから

$$y = a(x - b)^2$$

と表される。2点(1, 8), (4, 2)を通るから

$$a(1 - b)^2 = 8 \quad \text{かつ} \quad a(4 - b)^2 = 2$$

連立方程式を解いて

$$(a, b) = (2, 3), \left(\frac{2}{9}, 7\right)$$

よって，求める関数は

$$y = 2(x - 3)^2, \quad y = \frac{2}{9}(x - 7)^2 \quad (\text{答})$$

(2) 2点(-2, 0), (1, 0)を通るから

$$y = a(x + 2)(x - 1)$$

とおくことができる。さらに，点(2, -8)を通るから

$$-8 = a(2 + 2)(2 - 1) \quad \therefore a = -2$$

よって，3点(-2, 0), (1, 0), (2, -8)を通る2次関数は

$$y = -2(x + 2)(x - 1) \quad (\text{答})$$

(3) 点(0, 2)を通る2次関数のグラフは

$$y = ax^2 + bx + 2$$

と表される。2点(-1, -5), (1, 7)を通るならば

$$a - b + 2 = -5 \quad \text{かつ} \quad a + b + 2 = 7 \quad \therefore a = -1, \quad b = 6$$

よって，3点(-1, -5), (0, 2), (1, 7)を通る2次関数は

$$y = -x^2 + 6x + 2 \quad (\text{答})$$

(注) (3)では $y = ax^2 + bx + c$ において機械的に処理してもよいが，未知数を減らす工夫をすることも大切である。 $y$ 軸との交点が与えられていない場合でも，例えば

$$\text{グラフが点(1, 7)を通る2次関数は } y = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + 7$$

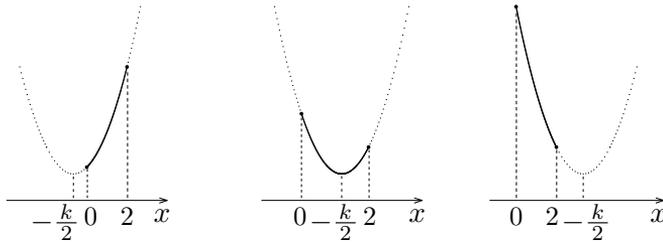
とおくことができる。

3 確認：2次関数の頂点は(関数としては)増減の変わり目を表すので、頂点と定義域の位置関係により定義域内の増減は異なることになる。そこで、最大値・最小値を求めるときは、頂点(もしくは軸)の位置で場合分けして考える。グラフを描いて実感をつかむことがマスターのコツ。

解答：

$$f(x) = x^2 + kx - k = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 - k$$

(1)



上図より、 $0 \leq x \leq 2$ における  $f(x)$  の最小値  $m(k)$  は

$$-\frac{k}{2} \leq 0 \text{ のとき } m(k) = f(0) = -k$$

$$0 \leq -\frac{k}{2} \leq 2 \text{ のとき } m(k) = f\left(-\frac{k}{2}\right) = -\frac{1}{4}k^2 - k$$

$$-\frac{k}{2} \geq 2 \text{ のとき } m(k) = f(2) = k + 4$$

以上をまとめて

$$m(k) = \begin{cases} k + 4 & (k \leq -4) \\ -\frac{1}{4}k^2 - k & (-4 \leq k \leq 0) \\ -k & (k \geq 0) \end{cases} \quad (\text{答})$$

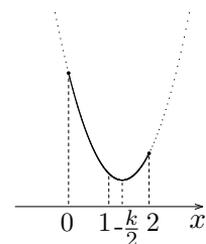
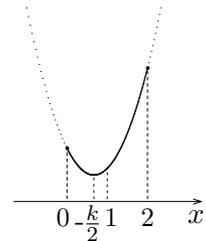
(2) 右図より、 $0 \leq x \leq 2$ における  $f(x)$  の最大値  $M(k)$  は

$$-\frac{k}{2} \leq 1 \text{ のとき } M(k) = f(2) = k + 4$$

$$-\frac{k}{2} \geq 1 \text{ のとき } M(k) = f(0) = -k$$

以上をまとめて

$$M(k) = \begin{cases} -k & (k \leq -2) \\ k + 4 & (k \geq -2) \end{cases} \quad (\text{答})$$



4 確認：2次式が因数分解できるときは，

$$XY = 0 \iff X = 0 \text{ または } Y = 0$$

により2次方程式は容易に解けるが，因数分解できないときは機械的に解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

にあてはめて解けばよい。場合によっては

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

を用いるとよい。

とは言うものの，因数分解による解法と公式による解法は本質的には同じであり，(1)において公式を導く過程は，平方完成して2次式を  $X^2 - Y^2 = (X+Y)(X-Y)$  と変形するものである。

2次式  $ax^2 + bx + c$  が

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解されるとすれば， $\alpha, \beta$  は2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の2解であるから，解の公式を用いて逆に因数分解することができる。

解答：

(1)  $a \neq 0$  に注意して平方完成すると

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

と変形できるから，

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \quad (\text{おわり})$$

(2) 解の公式より  $2x^2 - 10x - 1 = 0$  の解は

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 2 \times (-1)}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

(3)  $2x^2 - 10x - 1 = 2(x - \alpha)(x - \beta)$  と因数分解されるとき， $x = \alpha$ ， $x = \beta$  を代入すると0になるから，(2)より

$$2x^2 - 10x - 1 = 2\left(x - \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}\right) \quad (\text{答})$$

- 5 確認：「2次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  の解」  
 $\iff$  「2次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  を満たす実数  $x$ 」  
 $\iff$  「 $y = ax^2 + bx + c$  と  $y > 0$  を同時に満たす  $x$ 」  
 $\iff$  「 $y = ax^2 + bx + c$  のグラフ上で  $y > 0$  の部分の  $x$  座標」

と言い換えられるので、2次不等式の解は2次関数のグラフを通して求めることができる。 $ax^2 + bx + c < 0$ ,  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $ax^2 + bx + c \leq 0$  についても同様である。

特に、 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$  ( $\alpha < \beta$ ) となる場合は解の公式として結果を覚えておくとよいだろう。 $\alpha < \beta$  のとき

$$(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \iff x < \alpha \text{ または } x > \beta$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \iff \alpha < x < \beta$$

となる。この公式もグラフと結びつけて理解することが大切である。

解答：

- (1)  $x^2 - 2x - 1 = 0$  とおくと、2次方程式の解の公式より

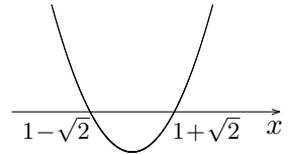
$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

であるから、

$$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$$

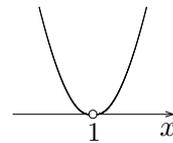
と因数分解できる。したがって、不等式  $x^2 - 2x - 1 > 0$  の解は

$$x < 1 - \sqrt{2} \text{ または } x > 1 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$



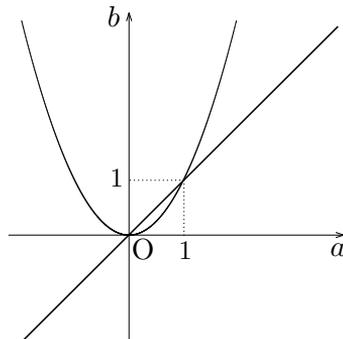
- (2)  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$  を満たす  $x$  を求めて

$$x \text{ は } 1 \text{ 以外のすべての実数} \quad (\text{答})$$



- (3)  $x^2 - (a^2 + a)x + a^3 = (x - a^2)(x - a) < 0$

$b = a$  と  $b = a^2$  のグラフは次のようになる。



グラフを参考にして、 $x$  の2次不等式  $x^2 - (a^2 + a)x + a^3 < 0$  の解は、

$$\left. \begin{array}{ll} a < 0 \text{ または } a > 1 \text{ のとき} & a < x < a^2 \\ a = 0 \text{ または } a = 1 \text{ のとき} & \text{解なし} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 < x < a \end{array} \right\} (\text{答})$$

6 確認：5で考えたように，2次不等式の解はグラフを通して表現できて，不等式の解の条件は  $x$  切片とグラフの上下関係でとらえられる。解をもたない条件は，

「2次不等式  $2ax^2 + 2bx + 1 \leq 0$  が解をもたない」

$\iff$  「つねに  $2ax^2 + 2bx + 1 > 0$  が成り立つ」

$\iff$  「 $2ax^2 + 2bx + 1$  の最小値が正」

と言い換えることができる。

なお，題意が「 $p \leq x \leq q$  においてつねに  $2ax^2 + 2bx + 1 > 0$ 」というのであれば， $p \leq x \leq q$  における最小値を求めることになり，3との融合問題となる。

解答：

$$(1) \quad x \leq -\frac{1}{2} \text{ または } x \geq 3 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) \geq 0$$

であるから，この不等式が  $2ax^2 + 2bx + 1 \leq 0$  と同値になるための条件を求めて，

$$2a < 0 \quad \text{かつ} \quad 2ax^2 + 2bx + 1 = 2a\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

係数を比べて

$$2b = -5a \quad \text{かつ} \quad 1 = -3a$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{5}{6} \quad (\text{答})$$

(2) 2次不等式  $2ax^2 + 2bx + 1 \leq 0$  が解をもたないのは，つねに

$$2ax^2 + 2bx + 1 = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{2a} + 1 > 0$$

が成り立つ場合であるから，

$$2a > 0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{b^2}{2a} + 1 > 0$$

$$\therefore b^2 < 2a \quad (\text{答})$$

(注) (2)において“ $2a > 0$ ”は最小値をもつための条件である。(2)の答は，直接的には“ $a > 0$  かつ  $b^2 < 2a$ ”であるが， $b$ は実数で  $b^2 \geq 0$  であるから

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 < 2a \iff b^2 < 2a$$

となる。

7 確認： $x$  の2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の2解が  $\alpha, \beta$  とするとき、 $x$  の恒等式

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

が成り立つから、係数を比較して

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

という関係式が得られる。これを解と係数の関係という。高校では、「1年生の間は公式として認めないで、導いてから用いる」ことになっているが、ここではそのような無意味なこだわりは持たないことにする。

2次方程式の実数解問題では、次の 8 のようにグラフで処理するのが一般的であるが、本問で扱うような3パターン

- (1) 2解の条件が対称式で表現できる
- (2) 2解の直接的な関係式が与えられている
- (3) 2解が整数である

の場合は、解と係数の関係を用いて解く方がむしろ適切である。

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の2解は  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  であるから、 $a, b, c$  が実数のときは

$$2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  が実数解をもつ  $\iff b^2 - 4ac > 0$$$

となる。この不変量  $b^2 - 4ac$  を(2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の)判別式という。判別式は、もともとは重解を判別するものであり、実数解を判別できるのは実数係数の場合に限られることに注意する。

解と係数の関係は実数解条件とは独立であるため、(1)のようなケースでは実数解条件を忘れてはならない。2数の符号についての条件は、実数  $\alpha, \beta$  に対して

$$\alpha > 0 \text{ かつ } \beta > 0 \iff \alpha + \beta > 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha < 0 \text{ かつ } \beta < 0 \iff \alpha + \beta < 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha \text{ と } \beta \text{ が異符号} \iff \alpha\beta < 0$$

と表現できる。ここでも、実数の前提がないと成り立たないことに注意する。

解答：

(1) 相異なる実数解をもつための条件は

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = (a+1)^2 - (a+3) > 0$$

$$a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

この条件のもとで、相異なる2実数解を  $\alpha, \beta$  とすると、解と係数の関係および実数の性質より

$$\alpha > 0 \text{ かつ } \beta > 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 2(a+1) > 0 \\ \alpha\beta = a+3 > 0 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より、求める範囲は

$$a > 1 \quad (\text{答})$$

(2) 2解を  $\alpha, 5\alpha$  とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + 5\alpha = 2(a+1) & \cdots \cdots \text{①} \\ \alpha \cdot 5\alpha = a+3 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

① ( $\Leftrightarrow a = 3\alpha - 1$ ) を②に代入して  $a$  を消去すると

$$5\alpha^2 = (3\alpha - 1) + 3$$

$$5\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$$

$$(\alpha - 1)(5\alpha + 2) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1, -\frac{2}{5}$$

①に代入して

$$a = 2, -\frac{11}{5} \quad (\text{答})$$

(注) 解が実数とは仮定されていないので、実数解条件は不要である。

(3) 2つの整数解を  $\alpha, \beta$  とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2(a+1) & \cdots \cdots \text{①} \\ \alpha\beta = a+3 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

2式より  $a$  を消去して

$$\alpha\beta = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} + 3$$

$$\alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 2$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\therefore (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 9$$

対称性より  $\alpha \leq \beta$  の場合だけ考えれば十分であり、 $2\alpha - 1, 2\beta - 1$  はともに整数であるから

$$(2\alpha - 1, 2\beta - 1) = (1, 9), (3, 3), (-9, -1), (-3, -3)$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = (1, 5), (2, 2), (-4, 0), (-1, -1)$$

②に代入して、求める値は

$$a = 2, 1, -3, -2 \quad (\text{答})$$

(注) 整数であるという条件を活かすには、 $a$  についての式ではなく、 $\alpha, \beta$  についての式に注目することがポイントである。整数であるという条件の中に実数解条件は含まれているので、判別式を用いる必要はない。

8 確認：実数解とグラフは

「方程式  $f(x) = 0$  の実数解  $x$ 」

$\iff$  「 $f(x) = 0$  を満たす実数  $x$ 」

$\iff$  「 $y = f(x)$  と  $y = 0$  を同時に満たす実数  $x$ 」

$\iff$  「 $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸 ( $y = 0$ ) の共有点の  $x$  座標」

の関係にあるから、解の配置問題では条件をグラフに表すことから始める。次に、

- (i) 共有点をもつための条件 (接する場合を含むかどうかもある)
- (ii) 指示された範囲の端での様子
- (iii) 軸の位置

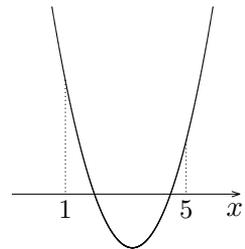
を図示したグラフから読み取ることにより、題意と同値の条件式が導かれる。

解答：

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (a-2)x + \frac{a}{2} + 5 \\ &= \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-2}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} + 5 \\ &= \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 6a - 16}{4} \\ &= \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{(a+2)(a-8)}{4} \end{aligned}$$

とおく。  $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸と共有点を持ち、すべての共有点が  $1 < x < 5$  の範囲にある条件を求めればよい。グラフの特徴より

$$\begin{cases} f\left(\frac{a-2}{2}\right) = -\frac{(a+2)(a-8)}{4} \leq 0 \\ f(1) = -\frac{1}{2}a + 8 > 0 \\ f(5) = -\frac{9}{2}a + 40 > 0 \\ 1 < \frac{a-2}{2} < 5 \end{cases}$$



$$\therefore 8 \leq a < \frac{80}{9} \quad (\text{答})$$

(注) 「相異なる2解」と明記されない限り、重解の場合も含めて考える。

9 確認：なんとなく 8 と似ているが，8 で「2 解についての条件」が提示されているのに対し，本問の「少なくとも 1 つ解をもつ」というのは，2 解についての条件ではない。そこで，8 と同様に解こうと思えば，

$$f(1)f(5) < 0, \quad f(1)f(5) = 0, \quad f(1)f(5) > 0$$

の各場合に分けて，2 解の条件を求める問題に還元して考える必要がある。

別の方法としては，3 の解法により  $f(x)$  のとり得る値の範囲を  $a$  で表しておいて，0 がその範囲内にあると考えることで解の存在条件を導くこともできる。

解答：

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (a-2)x + \frac{a}{2} + 5 \\ &\vdots \\ &= \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{(a+2)(a-8)}{4} \end{aligned}$$

(i)  $f(1)f(5) = \left(-\frac{1}{2}a + 8\right)\left(-\frac{9}{2}a + 40\right) < 0$  のとき

2 点  $(1, f(1)), (5, f(5))$  が  $x$  軸に関して反対側にあるから条件を満たし，  

$$\frac{80}{9} < a < 16$$

(ii)  $f(1) = -\frac{1}{2}a + 8 = 0$  のとき

$$f(x) = x^2 - 14x + 13 = (x-1)(x-13)$$

となつて， $1 < x < 5$  の範囲に解はない。

(iii)  $f(5) = -\frac{9}{2}a + 40 = 0$  のとき

$$f(x) = x^2 - \frac{62}{9}x + \frac{85}{9} = (x-5)\left(x - \frac{17}{9}\right)$$

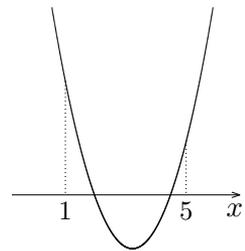
となつて， $1 < \frac{17}{9} < 5$  より  $a = \frac{80}{9}$  は条件を満たす。

(iv)  $f(1)f(5) > 0$  のとき

$y = f(x)$  が下に凸であることより  $f(1) < 0, f(5) < 0$  の場合は条件を満たさず，共有点(2 解)がすべて  $1 < x < 5$  にある条件を求めることになり，

$$\begin{cases} f\left(\frac{a-2}{2}\right) = -\frac{(a+2)(a-8)}{4} \leq 0 \\ f(1) = -\frac{1}{2}a + 8 > 0 \\ f(5) = -\frac{9}{2}a + 40 > 0 \\ 1 < \frac{a-2}{2} < 5 \end{cases}$$

$$\therefore 8 \leq a < \frac{80}{9}$$



(i)または(ii)または(iii)または(iv)より, 求める範囲は

$$8 \leq a < 16 \quad (\text{答})$$

別解:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (a-2)x + \frac{a}{2} + 5 \\ &\vdots \\ &= \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{(a+2)(a-8)}{4} \end{aligned}$$

の  $1 < x < 5$  における値域は

$$\frac{a-2}{2} \leq 1 \text{ のとき } f(1) < f(x) < f(5)$$

$$1 < \frac{a-2}{2} \leq 3 \text{ のとき } f\left(\frac{a-2}{2}\right) \leq f(x) < f(5)$$

$$3 \leq \frac{a-2}{2} < 5 \text{ のとき } f\left(\frac{a-2}{2}\right) \leq f(x) < f(1)$$

$$\frac{a-2}{2} \geq 5 \text{ のとき } f(5) < f(x) < f(1)$$

であり, 題意の条件はこの範囲内に 0 が含まれることと考えられるから,

$$(v) \quad \frac{a-2}{2} \leq 1 \text{ すなわち } a \leq 4 \text{ のとき}$$

$$-\frac{1}{2}a + 8 < 0 < -\frac{9}{2}a + 40$$

これは  $16 < a < \frac{80}{9}$  となって不可。

$$(vi) \quad 1 < \frac{a-2}{2} \leq 3 \text{ すなわち } 4 < a \leq 8 \text{ のとき}$$

$$-\frac{(a+2)(a-8)}{4} \leq 0 < -\frac{9}{2}a + 40 \quad \therefore a = 8$$

$$(vii) \quad 3 \leq \frac{a-2}{2} < 5 \text{ すなわち } 8 \leq a < 12 \text{ のとき}$$

$$-\frac{(a+2)(a-8)}{4} \leq 0 < -\frac{1}{2}a + 8 \quad \therefore 8 \leq a < 12$$

$$(viii) \quad \frac{a-2}{2} \geq 5 \text{ すなわち } a \geq 12 \text{ のとき}$$

$$-\frac{9}{2}a + 40 < 0 < -\frac{1}{2}a + 8 \quad \therefore 12 \leq a < 16$$

(v)または(vi)または(vii)または(viii)より, 求める  $a$  の範囲は

$$8 \leq a < 16 \quad (\text{答})$$

10 確認：通常「 $y$ が $x$ の関数」というときは、 $x$ の値に対して $y$ の値が定まると解釈するが、とり得る値に関しては、単に「 $x$ と $y$ が等式を満たしながら(同時に)変化している」と考えてよい。そこで、問題の関数等式を $x$ について整理して、 $x$ の2次方程式が実数解をもつ条件を求めれば、 $y$ のとり得る値の範囲が求まる。(2)では $x > 0$ と定義域が制限されているので、(一般には)9の解法に従うことになる。

解答：

$$(1) x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ であるから}$$

$$y = \frac{x}{x^2 + x + 1} \iff y(x^2 + x + 1) = x \iff yx^2 + (y-1)x + y = 0$$

これを $x$ の方程式とみなして実数解をもつ条件を求めると

(i)  $y = 0$  のとき

方程式は $x = 0$ となって実数解 $x = 0$ が存在するから、 $y = 0$ は値域内である。

(ii)  $y \neq 0$  のとき

上の方程式は2次方程式となって、実数解条件は

$$(\text{判別式}) = (y-1)^2 - 4y^2 = (3y-1)(-y-1) \geq 0$$

$$\therefore -1 \leq y \leq \frac{1}{3} \text{ (かつ } y \neq 0)$$

(i) または (ii) より

$$-1 \leq y \leq \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

$$(2) y = x + \frac{1}{x} \iff x^2 - yx + 1 = 0$$

これを $x$ の2次方程式とみなして、正の解を少なくとも1つもつための条件を求めればよいが、

$$(2 \text{ 解の積}) = 1 > 0$$

より2解がともに正となる条件を求めることになる。

$$(\text{判別式}) = y^2 - 4 \geq 0 \text{ かつ } (2 \text{ 解の和}) = y > 0$$

より、 $y$ の値域は

$$y \geq 2 \quad (\text{答})$$

(注) 相加・相乗平均の不等式を用いて

$$y = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \quad (\text{不等式の等号は } x = 1 \text{ のとき成立})$$

を導くことはできるが、これは単に「最小値が2」と主張しているだけで、「2以上のすべての値をとり得る」ことまでは主張していない。(→「式と証明」ファイル)