

## 分母を有理化する意味は何なのか？

分母の有理化は「簡単にするため」とされているが、ここで言う「簡単」の意味はあまり説明されていないように思われる。見ようによっては、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

はそのままで十分簡単だという解釈も成り立つ。そこには、数をどのように拡張するかという問題が横たわる。

中学で0および負の数を習ったが、それまで正の数の範囲で行なっていた計算を、差についても閉じているように拡張したのであった。そして、商についても閉じているように整数の比、つまり有理数に拡張したのであった。

次に登場するのが無理数である。 $m$ が平方因数を持たない2以上の整数であるとき、 $\sqrt{m}$ が整数の比で表されないことを背理法で示したあと、無理数 $\sqrt{m}$ をどのように数の体系に取り入れたのかを思い出してみよう。新しく登場した無理数 $\sqrt{m}$ に対して、有理数 $q$ との積、有理数 $p$ との和も演算について閉じている集合を作ろうとすると

$$p + q\sqrt{m} \quad (p, q \text{ は有理数})$$

の形の数を考えるのが自然である。このような線型拡張は、何も高校数学の範囲だけにとどまらず、一般に広く用いられる手法である。ここで、問題となるのが、

加減乗除について閉じているように演算が定義できるのか？

ということである。

有理数と無理数を足すとか掛けるとはどういうことなのか？

と言い出すと事態が複雑になるので、有理数係数の1次多項式の計算により

$$\begin{aligned}(a + bx) + (c + dx) &= a + c + (b + d)x, \\(a + bx) - (c + dx) &= a - c + (b - d)x, \\(a + bx)(c + dx) &= ac + (ad + bc)x + bdx^2 \\ &= ac + bdm + (ad + bc)x\end{aligned}$$

と定めることで、

有理数どうしの計算だけで和、差、積を定義するという絶妙な方法をとったのであった。

最後に商についてであるが、1次分数式として

$$\frac{a + b\sqrt{m}}{c + d\sqrt{m}} \quad (a, b, c, d \text{ は有理数}, c^2 + d^2 \neq 0)$$

を定めればよさそうであるが、問題は

この数が $p + q\sqrt{m}$ の形の数なのか？

ということである。そうでなければ、拡張は失敗に終わってしまう。そこで登場するのが、分母の有理化である。

既に、積は定義されているので、分母内および分子内で積を計算することは可能である。展開公式

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

を用いて分母から  $\sqrt{m}$  の表示をなくすと、

$$\begin{aligned} \frac{a + b\sqrt{m}}{c + d\sqrt{m}} &= \frac{(a + b\sqrt{m})(c - d\sqrt{m})}{(c + d\sqrt{m})(c - d\sqrt{m})} \\ &= \frac{ac - bdm + (bc - ad)\sqrt{m}}{c^2 - d^2m} \\ &= \frac{ac - bdm}{c^2 - d^2m} + \frac{bc - ad}{c^2 - d^2m} \sqrt{m} \end{aligned}$$

となり、 $p + q\sqrt{m}$  ( $p, q$  は有理数、 $m$  は平方因数を含まない 2 以上の整数) の形の数であることが確かめられ、商が定義できた。つまり、

分母の有理化は、商の定義を確認するために行なっていたのである。裏を返せば、こうした数の演算や集合の確認とは全く関係なく、単に値として表記するだけであれば、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$  などの表示も十分にわかりやすく、敢えて分母を有理化する必要はないのである。

実は、無理数にも 2 種類あって、有理数係数の多項式の解となる代数的数と呼ばれる数と、そうでない数(超越数)とに分けられる。上の例に出てくる数  $p + q\sqrt{m}$  は ( $x$  の) 2 次方程式

$$x^2 - 2px + (p^2 - q^2m) = 0$$

の解であるから、代数的数である。さらに、高次の代数的数を扱うには有理数係数のベクトル空間を考える必要があるので、ますます分母に無理数があると不都合となり、分母の有理化は欠かせないことになる。

ちなみに、有理数から実数へ拡張したのは、極限について閉じているようにするためである。有理数から成るコーシー列がすべて集合内で収束するように拡張した数の集合が実数である。残念ながら、ここまでくると高校数学の範囲を越えてしまうので、大学できちんと勉強してもらいたい。