

I.

$$(i) \{f'(x)\}^2 + xf(x) + x = 0 \text{ より}$$

$$(3ax^2)^2 + x(ax^3 + b) + x = 0$$

$$\therefore a(9a+1)x^4 + (b+1)x = 0$$

すべての実数  $x$  に対して成り立つから

$$a(9a+1) = 0 \text{ かつ } b+1 = 0$$

 $a \neq 0$  より

$$a = \boxed{-\frac{1}{9}}, \quad b = \boxed{-1}$$

(ア) (イ)

$$(ii) \vec{a} \perp \vec{b} \text{ より}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t \cdot 2 + (t+1)t + 2(t+3) = (t+2)(t+3) = 0$$

$$\vec{b} \perp \vec{c} \text{ より}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 0 + t \cdot (-1) + (t+3)t = t(t+2) = 0$$

 $\vec{a} \perp \vec{b}$  かつ  $\vec{b} \perp \vec{c}$  が成り立つのは

$$t = \boxed{-2} \text{ (ウ)}$$

のときである。

$$(iii) \text{ 仮定より}$$

$$a_1 - 4a_1r^2 = 1 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$a_1 - 6a_1r + 9a_1r^2 = 0 \quad \dots\dots \text{②}$$

 $a_1 \neq 0$  であるから, ②より

$$1 - 6r + 9r^2 = 0$$

$$(1 - 3r)^2 = 0 \quad \therefore r = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ (エ)}$$

①より

$$a_1 = \frac{1}{1 - 4r^2} = \frac{9}{5}$$

 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は初項  $a_1 = \frac{9}{5}$ , 公比  $\frac{1}{3}$  の無限等比級数であるから,  $0 < \frac{1}{3} < 1$  より収束し,

和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{9}{5}}{1 - \frac{1}{3}} = \boxed{\frac{27}{10}} \text{ (オ)}$$

(iv) 四角形 ABCD が円に内接することより

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

であるから,  $\angle ABC = \theta$  とすれば

$$\angle ADC = 180^\circ - \theta$$

$\triangle ABC$  および  $\triangle ACD$  に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AC^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos \theta \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \theta) \end{aligned}$$

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$  より

$$45 - 36 \cos \theta = 25 + 24 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{45 - 25}{36 + 24} = \frac{20}{60} = \boxed{\frac{1}{3}} \quad (\text{カ})$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3}} = \boxed{\sqrt{33}} \quad (\text{キ})$$

(v)

$$\begin{aligned} z &= \cos \frac{\pi}{6} + i \left( 1 + \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \\ &= \boxed{\sqrt{3}} \left( \cos \boxed{\frac{\pi}{3}} + i \sin \boxed{\frac{\pi}{3}} \right) \end{aligned}$$

(ク)                      (ケ)                      (ケ)

II.

(i) 得点が 1 となるのは、さいころが 1 つだけ出て、1 の目が出る場合であるから、

$$Q(1) = \frac{1}{6}p \quad (\text{答})$$

(ii) 得点が 12 となるのは、さいころが 2 つ出て、ともに 6 の目が出る場合であるから、

$$Q(12) = \frac{1}{36}(1-p) \quad (\text{答})$$

(iii)  $1 \leq k \leq 6$  のとき、得点が  $k$  となるのは

- さいころが 1 つ出て  $k$  の目が出る
- さいころが 2 つ出て目の和が  $k$

のいずれかの場合であり、2 つの目の和が  $k$  となるのは $(1, k-1), (2, k-2), \dots, (k-1, 1)$  の  $k-1$  通り

であるから、

$$\begin{aligned} Q(k) &= p \cdot \frac{1}{6} + (1-p) \cdot \frac{k-1}{6^2} \\ &= \frac{1-p}{36}k + \frac{7p-1}{36} \quad (\text{答}) \\ &= \frac{7-k}{36}p + \frac{k-1}{36} \end{aligned}$$

(iv)  $7 \leq k \leq 12$  のとき、得点が  $k$  となるのは、さいころが 2 つ出て目の和が  $k$ となる場合であり、目の和が  $k$  となるのは $(k-6, 6), (k-5, 5), \dots, (6, k-6)$  の  $6 - (k-6) + 1 = 13 - k$  通り

であるから、

$$\begin{aligned} Q(k) &= (1-p) \cdot \frac{13-k}{6^2} \\ &= \frac{p-1}{36}k + \frac{13(1-p)}{36} \quad (\text{答}) \\ &= \frac{13-k}{36}(1-p) \end{aligned}$$

(v)  $Q(6) = Q(7)$  のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{36}p + \frac{5}{36} &= \frac{6}{36}(1-p) \\ p + 5 &= 6(1-p) \\ 7p - 1 &= 0 \\ \therefore p &= \frac{1}{7} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

III.

(i)  $f(x)$  の導関数は

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} \quad (\text{答})$$

 $f(x)$  の不定積分は

$$F(x) = x(\log x - 1) + a \log x - 2x \log 2 + C \quad (C \text{ は定数}) \quad (\text{答})$$

(ii)  $a > 0$  に注意して,  $x > 0$  において

$$f'(x) < 0 \iff \frac{1}{x} < \frac{a}{x^2} \iff x < a$$

であるから,  $f(x)$  の増減は

$x$	(0)	$a$	( $\infty$ )
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		\searrow 極小 \nearrow	

 $f(x)$  の最小値は

$$f(a) = \log a + 1 - 2 \log 2 \quad (\text{答})$$

(iii)

$$f(t) = \log t + \frac{a}{t} - 2 \log 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \log t + \frac{2a}{t} - 3 \log 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つから, ② - ① より

$$\frac{a}{t} - \log 2 = 0 \quad \therefore a = t \log 2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①に代入して

$$\begin{aligned} f(t) &= \log t + \log 2 - 2 \log 2 = 0 \\ \log t &= \log 2 \quad \therefore t = 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

③より

$$a = 2 \log 2 \quad (\text{答})$$

(iv) (iii) のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{-f(x)\} dx \\ &= F(1) - F(2) \\ &= -1 - 2(\log 2 - 1) + 2 \log 2(0 - \log 2) - 2 \times (1 - 2) \times \log 2 \\ &= 1 - 2(\log 2)^2 \end{aligned}$$

であるから,

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -2 \quad (\text{答})$$

IV.

(i)

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \quad (\text{答})$$

$$a_2 = \frac{2 \times (1 + 5)}{2^2} = 3 \quad (\text{答})$$

(ii)  $b + c = 1$ ,  $bc = \frac{1 - 5}{2^2} = -1$  より,  $b, c$  を 2 解とする 2 次方程式は

$$x^2 - x - 1 = 0$$

であるから,

$$b^2 - b - 1 = 0, \quad c^2 - c - 1 = 0$$

これを用いて

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= b^{n+2} + c^{n+2} - (b^{n+1} + c^{n+1}) \\ &= b^n(b^2 - b) + c^n(c^2 - c) \\ &= b^n \cdot 1 + c^n \cdot 1 \\ &= a_n \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(iii) (ii)の結果を用いて

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 4 + 3 = 7$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 7 + 4 = 11 \quad (\text{答})$$

(iv)  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$  は整数であり,  $a_k, a_{k+1}$  が整数であるとすれば

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k \text{ も整数}$$

であるから, 数学的帰納法により

$$a_n \text{ は整数}$$

であることが示された。よって,

$$\sin(2\pi a_n) = 0, \quad \cos(2\pi a_n) = 1 \quad (\text{答})$$

(v)  $2^2 < 5 < 3^2$  より

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

であるから,

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1, \quad -1 < c = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$$

 $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$  となるから

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi c^n)}{b^n} = 0 \quad (\text{答})$$

(vi) 基本周期が  $2\pi$  であることと負角の公式より

$$\sin(2\pi b^n) = \sin\{2\pi(b^n + c^n) - 2\pi c^n\} = \sin(-2\pi c^n) = -\sin(2\pi c^n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} T &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi b^n)}{c^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sin(2\pi c^n)}{c^n} \\ &= -2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi c^n)}{2\pi c^n} \\ &= -2\pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$