

I.

(i) A を 4 進法表示で

$$xy \quad (x = 1, 2, 3; y = 1, 2, 3)$$

であるとすれば, 仮定より

$$4x + y = 10y + x$$

$$3x = 9y$$

$$\therefore x = 3y$$

 x, y のとり得る値を考えると

$$y = 1, x = 3$$

の場合だけであり,

$$10 \text{ 進法表示で } A = \boxed{13} \text{ (ア)}$$

$$(ii) \quad \cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{5}$$

の両辺を平方すると,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$1 + \sin 2\theta = \frac{1}{25} \quad \therefore \sin 2\theta = -\frac{24}{25}$$

 $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ であり, $-\frac{\pi}{2} < 2\theta < 0$ より $\cos 2\theta > 0$ であるから

$$\cos 2\theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2} = \boxed{\frac{7}{25}} \text{ (イ)}$$

(別解) 加法定理を用いると,

$$\begin{aligned} \cos \theta + \sin \theta &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

と変形できるから, 仮定の式は

$$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

 $0 < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ より

$$\cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{1 - \sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

負角の公式，余角の公式，加法定理を用いて

$$\begin{aligned}
 \cos 2\theta &= \cos(-2\theta) \\
 &= \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\
 &= \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= 2 \times \frac{1}{5\sqrt{2}} \times \frac{7}{5\sqrt{2}} = \boxed{\frac{7}{25}} \\
 &\quad \text{(イ)}
 \end{aligned}$$

(iii) PはBCの中点であるから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

QはGHの中点であるから

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}
 \end{aligned}$$

RはPQの中点であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}) = \boxed{\frac{3}{4}}\overrightarrow{AB} + \boxed{\frac{3}{4}}\overrightarrow{AD} + \boxed{\frac{1}{2}}\overrightarrow{AE}$$

(ウ) (エ) (オ)

(iv) 仮定より， x の恒等式

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 + ax^2 + bx - 2 \\
 &= (x^2 - 2x + 1)(x + c) + x - 1 \quad (c \text{ は定数}) \\
 &= x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - 2c)x + c - 1
 \end{aligned}$$

が成り立つから，係数を比べると

$$\begin{cases} a = c - 2 \\ b = -2c + 2 \\ -2 = c - 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} c = -1 \\ a = \boxed{-3} \text{ (カ)} \\ b = \boxed{4} \text{ (キ)} \end{cases}$$

(v) $|z| = 1$ を満たすとき

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表され，

$$z^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$\begin{aligned}\left|z^3 - \frac{1}{z^3}\right| &= |\cos 3\theta + i \sin 3\theta - (\cos 3\theta - i \sin 3\theta)| \\ &= |2i \sin 3\theta| \\ &= 2|\sin 3\theta|\end{aligned}$$

$0 \leq |\sin 3\theta| \leq 1$ の範囲をとり得るから

$$\left|z^3 - \frac{1}{z^3}\right| \text{の最大値は } \boxed{\frac{2}{(ク)}}$$

このとき

$$\sin 3\theta = \pm 1$$

$0 < 3\theta < \frac{3}{2}\pi$ では

$$3\theta = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \arg z = \boxed{\frac{\pi}{6}}_{(ク)}$$

II.

(i) 動点 P が $t+1$ 秒後に頂点 B にあるのは,

- t 秒後に頂点 A または頂点 C にあり, 確率 p で頂点 B に移る
- t 秒後に頂点 D にあり, 確率 $1-2p$ で頂点 B に移る

のいずれかの場合であるから,

$$B(t+1) = pA(t) + pC(t) + (1-2p)D(t) \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad (\text{答})$$

同様に,

$$D(t+1) = pA(t) + (1-2p)B(t) + pC(t) \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad (\text{答})$$

(ii) ① - ② より

$$B(t+1) - D(t+1) = (2p-1)\{B(t) - D(t)\} \quad \dots\dots \textcircled{3} \quad (\text{答})$$

(iii) 動点 P はつねに 4 頂点 A, B, C, D のいずれかにあるから

$$A(t) + B(t) + C(t) + D(t) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{4} \quad (\text{答})$$

③より, $\{B(t) - D(t)\}$ は初項 $B(0) - D(0) = 0$, 公比 $2p-1$ の等比数列であるから

$$B(t) - D(t) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5} \quad (\text{答})$$

(iv) ①, ⑤ より

$$\begin{aligned} B(t+1) &= pA(t) + pC(t) + (1-2p)B(t) \\ &= p\{A(t) + B(t) + C(t) + D(t)\} + (1-4p)B(t) \end{aligned}$$

④より

$$B(t+1) = (1-4p)B(t) + p \quad \dots\dots \textcircled{6} \quad (\text{答})$$

(v) $\beta = (1-4p)\beta + p$ ($p \neq 0$) を満たす定数 β を求めることにより

$$\frac{1}{4} = (1-4p) \times \frac{1}{4} + p \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑥ - ⑦ より

$$B(t+1) - \frac{1}{4} = (1-4p)\left\{B(t) - \frac{1}{4}\right\}$$

 $\left\{B(t) - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $B(0) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, 公比 $1-4p$ の等比数列であるから,

$$B(t) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(1-4p)^n \quad \therefore B(t) = \frac{1}{4}\{1 - (1-4p)^n\}$$

 $p = \frac{1}{3}$ であるとき

$$1-4p = 1-4 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

であるから,

$$B(t) = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} \quad (\text{答})$$

III.

(i) $e^x > 0, e^{-x} > 0$ を考えて, 相加・相乗平均の不等式より

$$t = e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$$

ここで, 不等式の等号は

$$e^x = e^{-x} \text{ すなわち } x = 0$$

のとき成り立つから,

$$t \text{ の最小値は } 2 \text{ (答)}$$

(注) 相加・相乗平均の不等式より t の最小値が 2 と求めただけでは, t のとり得る値の範囲まではわからない。

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad f'(x) &= 2 \cdot \frac{2e^{2x}(1+e^{2x}) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} - \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{4}{(e^{-2x}+1)(1+e^{2x})} - \frac{1}{(e^{-x}+1)(1+e^x)} \\ &= \frac{4}{1+e^{2x}+e^{-2x}+e^{2x}e^{-2x}} - \frac{1}{1+e^x+e^{-x}+e^xe^{-x}} \\ &= \frac{4}{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}} - \frac{1}{1+e^x+e^{-x}+1} \\ &= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} - \frac{1}{e^x+e^{-x}+2} \\ &= \frac{4}{t^2} - \frac{1}{t+2} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(iii) $t = e^x + e^{-x}$ とおくと, (i) より

$$t \geq 2$$

であり, (ii) より

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \frac{4}{t^2} > \frac{1}{t+2} \\ &\iff 4(t+2) > t^2 \\ &\iff t^2 - 4t - 8 < 0 \\ &\iff 2 \leq t < 2 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

 $x > 0$ において

$$\frac{dt}{dx} = e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1) > 0$$

であるから,

$$x \geq 0 \text{ において } t = e^x + e^{-x} \text{ は増加関数}$$

である。したがって、 $e^\alpha + e^{-\alpha} = 2 + 2\sqrt{3}$ を満たす正の実数 α がただ 1 つ存在し、

$$f'(x) > 0 \iff (2 \leq) e^x + e^{-x} < e^\alpha + e^{-\alpha} \iff 0 < x < \alpha$$

であるから、 $f(x)$ の増減は

x	(0)	α	(∞)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	極大	\searrow

以上より、 $x > 0$ において $f(x)$ は $x = \alpha$ のとき最大であり、このとき

$$t = e^\alpha + e^{-\alpha} = 2 + 2\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(iv)

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a \left\{ \frac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}} - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} \right\} dx \\ &= \left[\log(1+e^{2x}) - \log(1+e^x) \right]_0^a \\ &= \log(1+e^{2a}) - \log 2 - \{ \log(1+e^a) - \log 2 \} \\ &= \log(1+e^{2a}) - \log(1+e^a) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(v) 平均値の定理より

$$S(a) = \frac{e^c}{1+e^c}(2a-a), \quad a < c < 2a$$

を満たす実数 c が (a の値ごとに) 存在して、

$$\frac{S(a)}{a} = \frac{e^c}{1+e^c} = \frac{1}{e^{-c}+1}$$

$a < c < 2a$ より

$$\frac{1}{e^{-a}+1} < \frac{S(a)}{a} < \frac{1}{e^{-2a}+1}$$

$0 < e^{-1} < 1$ より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-2a} = 0$$

であるから、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-a}+1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-2a}+1} = 1$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a} = 1 \quad (\text{答})$$

IV.

(i) $0 \leq x < 1$ において $[x] = 0$ であるから,

$$f(x) = 1 - x + x^2 \quad (\text{答})$$

(ii) $1 \leq x < 2$ において $[x] = 1$ であるから,

$$f(x) = 1 - x + x^2 + a \cdot 1 - 2x \cdot 1 + 1^2 = x^3 - 3x + a + 2 \quad (\text{答})$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x^2 - 3x + a + 2) = a$$

 $f(x)$ が $x = 1$ で連続となるのは

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

のときであるから,

$$a = 1 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad f(x+1) - f(x) &= -(x+1-x) + (x+1)^2 - x^2 + a([x+1] - [x]) \\ &\quad - 2(x+1)([x]+1) + 2x[x] + ([x]+1)^2 - [x]^2 \\ &= -1 + (2x+1) + a - 2[x] - 2(x+1) + 2[x] + 1 \\ &= a - 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(v) $a = 1$ のとき, (iv) より

$$f(x+1) = f(x)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^n f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 f(x+k-1) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 f(x) dx \\ &= n \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx \\ &= n \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{5}{6} n \quad (\text{答}) \end{aligned}$$