

I . 下記の空欄ア～ケに当てはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

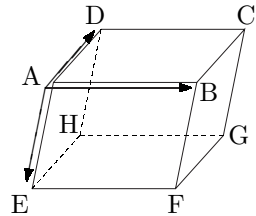
(i) 10進法で表された2桁の自然数 A を4進法で表すと, 数字の並び方が反対の順になった. このとき A を10進法で表すと, $A = \boxed{\text{ア}}$ である.

(ii) $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ とする. $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{5}$ であるとき, $\cos 2\theta = \boxed{\text{イ}}$ である.

(iii) 平行六面体 $ABCD - EFGH$ において辺 BC の中点を P , 辺 GH の中点を Q とする. 線分 PQ の中点を R とするとき,

$$\vec{AR} = \boxed{\text{ウ}} \vec{AB} + \boxed{\text{エ}} \vec{AD} + \boxed{\text{オ}} \vec{AE}$$

である.

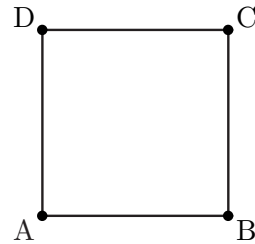


(iv) a, b は実数とする. 整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ を $(x - 1)^2$ で割った余りが $x - 1$ であるならば, $a = \boxed{\text{カ}}$, $b = \boxed{\text{キ}}$ である.

(v) 複素数 z が $|z| = 1$ を満たすとき, $\left|z^3 - \frac{1}{z^3}\right|$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ である. また, 最大値をとるときの z のうち, $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ を満たすものの偏角は, $\arg z = \boxed{\text{ケ}}$ である.

Ⅱ. p を $0 < p < \frac{1}{2}$ を満たす実数とする. 図のように表された四辺形 ABCD の頂点上を点 P が次の規則で移動する.

- 初期時刻 $t = 0$ で点 P は頂点 A 上にある.
- 点 P は 1 秒ごとに, 点 P と辺で結ばれている頂点の一方に確率 p で移動し, 点 P と辺で結ばれていない頂点に確率 $1 - 2p$ で移動する.



0 以上の整数 t に対し, t 秒後に点 P が頂点 A, B, C, D 上にある確率をそれぞれ $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ で表す. たとえば $A(1) = 0$, $B(1) = p$, $C(1) = 1 - 2p$, $D(1) = p$ である. このとき, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

- (i) $B(t+1)$ を $A(t)$, $C(t)$, $D(t)$ および p を用いて表せ. また, $D(t+1)$ を $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ および p を用いて表せ.
- (ii) $B(t+1) - D(t+1)$ を $B(t)$, $D(t)$ および p を用いて表せ.
- (iii) $A(t) + B(t) + C(t) + D(t)$ と $B(t) - D(t)$ の値をそれぞれ求めよ.
- (iv) $B(t+1)$ を $B(t)$ と p を用いて表せ.
- (v) $p = \frac{1}{3}$ であるとき, $B(t)$ を t を用いて表せ.

Ⅲ．関数

$$f(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

について，次の問 (i) ~ (v) に答えよ．ただし，(i) ~ (iii) において $t = e^x + e^{-x}$ とおく．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(i) x が実数全体を動くとき， t の最小値を求めよ．

(ii) 導関数 $f'(x)$ を t を用いて表せ．

(iii) $f(x)$ が $x > 0$ において最大値をとるとき， t の値を求めよ．

(iv) a を正の実数とする． $S(a) = \int_0^a f(x) dx$ を a を用いて表せ．

(v) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a}$ を求めよ．

IV. a を実数とする．関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = 1 - x + x^2 + a[x] - 2x[x] + [x]^2$$

ただし，実数 x に対し，記号 $[x]$ は $n \leq x < n + 1$ を満たす整数 n を表す．たとえば $[0] = 0$ ， $[\sqrt{2}] = 1$ ， $[\frac{5}{2}] = 2$ である．このとき，次の問 (i) ~ (v) に答えよ．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(i) $0 \leq x < 1$ の範囲において， $f(x)$ を x の整式で表せ．

(ii) $1 \leq x < 2$ の範囲において， $f(x)$ を a を用いた x の整式で表せ．

(iii) $f(x)$ が $x = 1$ で連続であるように， a の値を定めよ．

(iv) $f(x+1) - f(x)$ を a を用いて表せ．ただし， $[x+1] = [x] + 1$ であることは証明せずに用いてよい．

(v) a を (iii) で定めた値とする． n を正の整数とするととき， $\int_0^n f(x) dx$ を n を用いて表せ．