

I . 下記の空欄ア～ケに当てはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

- (i) a, b を定数とし, $a \neq 0$ であるとするとき, 関数 $f(x) = ax^3 + b$ が, すべての実数 x に対して

$$\{f'(x)\}^2 + xf(x) + x = 0$$

を満たすとする. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である. このとき, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.

- (ii) 3つの空間ベクトル $\vec{a} = (t, t+1, 2)$, $\vec{b} = (2, t, t+3)$, $\vec{c} = (0, -1, t)$ について, $\vec{a} \perp \vec{b}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{c}$ が成り立つのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである.

- (iii) 初項が 0 でなく, 公比が r の等比数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 - 4a_3 = 1$$

$$a_1 - 6a_2 + 9a_3 = 0$$

とともに満たすとする. このとき $r = \boxed{\text{エ}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{オ}}$ である.

- (iv) 円に内接する四角形 ABCD において, $AB = 3$, $BC = 6$, $CD = 4$, $DA = 3$ であるとする. このとき, $\angle ABC = \theta$ とすれば, $\cos \theta = \boxed{\text{カ}}$ であり, $AC = \boxed{\text{キ}}$ である.

- (v) i を虚数単位とする. 複素数 $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \left(1 + \sin \frac{\pi}{6}\right)$ を極形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ で表すと, $r = \boxed{\text{ク}}$, $\theta = \boxed{\text{ケ}}$ である. ただし $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

II. $0 \leq p \leq 1$ とする. さいころが 2 つ入った箱があり, その箱を 1 回振ると確率 p でさいころが 1 つ, 確率 $1-p$ でさいころが 2 つ出るとする. 箱を 1 回振り, 出たさいころが 1 つのときはその目を得点とし, 出たさいころが 2 つのときは出た目の合計を得点とするゲームを行う. 箱を 1 回振ったとき, $1 \leq k \leq 12$ を満たす整数 k に対し, 得点が k である確率を $Q(k)$ とする. この $Q(k)$ について, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) $Q(1)$ を p を用いて表せ.

(ii) $Q(12)$ を p を用いて表せ.

(iii) $1 \leq k \leq 6$ のとき, $Q(k)$ を p と k を用いて表せ.

(iv) $7 \leq k \leq 12$ のとき, $Q(k)$ を p と k を用いて表せ.

(v) $Q(6) = Q(7)$ となる p を求めよ.

Ⅲ. $a > 0$ とするとき, 関数

$$f(x) = \log x + \frac{a}{x} - 2 \log 2 \quad (x > 0)$$

について, 次の問 (i) ~ (iv) に答えよ. ただし, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ であることを用いてもよい. (i) の解答欄には答えのみを書き, (ii) ~ (iv) の解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と不定積分 $F(x)$ をそれぞれ求めよ.

(ii) $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ.

(iii) $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解 $t, \frac{t}{2}$ を持つとする. このとき, t の値と a の値をそれぞれ求めよ.

(iv) (iii) のとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S とする.

$$S = A + B \log 2 + C(\log 2)^2$$

となる整数 A, B, C を求めよ.

IV. $b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ とする. 数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = b^n + c^n$$

で与えられるとき, 次の問 (i) ~ (vi) に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) a_1, a_2 を求めよ.

(ii) $a_{n+2} - a_{n+1}$ を a_n を用いて表せ.

(iii) (ii) で得られた結果を用いて a_5 を求めよ.

(iv) 自然数 n に対して $\sin(2\pi a_n)$, $\cos(2\pi a_n)$ を求めよ.

(v) 極限 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi c^n)}{b^n}$ を求めよ.

(vi) 極限 $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi b^n)}{c^n}$ を求めよ.