

問 1

(1) 半径 1 の円に外接する正六角形は、中線の長さ 1 の正三角形 6 個から成るから、面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \sin \frac{\pi}{3} \times 6 = 2\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(2) $x \geq 1$, $y = \frac{4}{x} > 1$ より

$$1 \leq x < 4$$

$$\log_2 1 \leq \log_2 x < \log_2 2^2$$

$$\therefore 0 \leq \log_2 x < 2$$

$$z = (\log_2 x)^2 \log_2 2y = (\log_2 x)^2 \log_2 \frac{8}{x} = (\log_2 x)^2 (3 - \log_2 x)$$

$t = \log_2 x$ とおくと

$$z = t^2(3 - t) = -t^3 + 3t^2 \quad (0 \leq t < 2)$$

$0 < t < 2$ において

$$\frac{dz}{dt} = -3t^2 + 6t = -3t(t - 2) > 0$$

であるから、 z は $0 \leq t < 2$ において増加関数であり、 z のとりうる値の範囲は

$$0^2 \times (3 - 0) \leq z < 2^2 \times (3 - 2)$$

$$\therefore 0 \leq z < 4 \quad (\text{答})$$

(3) 平均値 m は

$$m = \frac{25 \times 0 + 75 \times 100}{100} = 75 \quad (\text{答})$$

分散 v は

$$v = \frac{25 \times (-75)^2 + 75 \times 25^2}{100} = \frac{25^3 \times (9 + 3)}{100} = 25^2 \times 3$$

標準偏差 σ は

$$\sigma = \sqrt{v} = 25\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

問 2

(1) 正方形の頂点を順に A, B, C, D とする。

$$\overrightarrow{AB} = (b, -a)$$

を点 A を中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転させると

$$\overrightarrow{AD} = (-(-a), b) = (a, b)$$

となるから,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (a+b, -a+b)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \text{ より}$$

$$C(a+b, b), \quad D(a, a+b) \quad (\text{答})$$

$$(\text{注}) \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta, \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$$

(2) $a > b > 0$ より, 線分 OP の長さの最大値は

$$OD = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{2a^2 + 2ab + b^2} \quad (\text{答})$$

(3) 線分 OP の長さの最小値は, 原点 O と直線 AB: $ax + by - ab = 0$ の距離であり, $a > 0, b > 0$ であることも考え,

$$\frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{答})$$

問 3

(1) A 社の売上

$$\begin{aligned}py &= p(10 - p) = -(p - 5)^2 + 25 \\ &= (10 - y)y = -(y - 5)^2 + 25\end{aligned}$$

が最大となるのは,

$$p = 5, \quad y = 5 \quad (\text{答})$$

のときである。

(2) A 社の利益

$$py - c(y) = (10 - y)y - y^2 = -2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$

は, (y が 1 以上の整数, $p = 10 - y$ のもとで,)

$$(p, y) = (8, 2), (7, 3) \quad (\text{答})$$

のとき最大となる。

(3) A 社の利益は

$$py - c(y) = (10 - y)y - (y^2 + 20y - 20) = -2y^2 - 10y + 20$$

は $1 \leq y \leq 10$ で単調減少であるから,

$$y = 1, \quad p = 9 \quad (\text{答})$$

のとき最大となる。

問 4

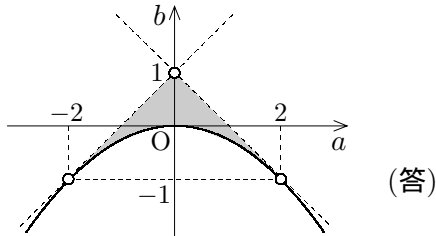
$$(1) f(x) = x^2 - ax - b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - b \text{ とおく.}$$

$y = f(x)$ のグラフと x 軸が共有点を持ち, 共有点がすべて $-1 < x < 1$ の範囲にある条件を求めて,

$$\begin{cases} (\text{頂点の } y \text{ 座標}) = -\frac{a^2}{4} - b \leq 0 \\ f(-1) = 1 + a - b > 0 \\ f(1) = 1 - a - b > 0 \\ \text{軸: } -1 < \frac{a}{2} < 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b \geq -\frac{1}{4}a^2 \\ b < a + 1 \\ b < -a + 1 \\ -2 < a < 2 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4}a^2 - (\pm a + 1) = -\frac{1}{4}(a^2 \pm 4a + 4) = -\frac{1}{4}(a \pm 2)^2$$

も考えて, ab 平面上に図示すると, 次図の網目部分となる。



(2) 2次方程式は実数係数であるから, 解 α が虚数のとき

$$\beta = \bar{\alpha}$$

解と係数の関係より

$$\alpha\beta = \alpha\bar{\alpha} = -b$$

であるから,

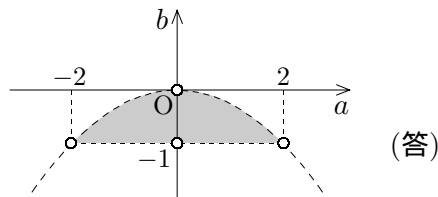
$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{-b} \quad (\text{答})$$

(3) 絶対値が 1 より小さい (互いに共役な) 2 虚数解をもつ条件は

$$(\text{判別式}) = a^2 + 4b < 0 \text{ かつ } |\alpha| = |\beta| = \sqrt{-b} < 1$$

$$\therefore -1 < b < -\frac{1}{4}a^2$$

ab 平面上に図示すると, 次図の網目部分となる。



問 5

(1) チーム A が全勝して優勝する確率は

$$p^3 \quad (\text{答})$$

(2) チーム A が 2 勝 1 敗して優勝するのは, A が敗れたチームが全勝しない場合であるから, 確率は

$$3p^2(1-p) \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} = \frac{9}{4}p^2(1-p) \quad (\text{答})$$

(3) A が B に勝って C と D に敗れて優勝するとすれば, C と D は A に勝っているから, C は D に敗れ, D は C に敗れなければならないが, これは矛盾である。

A が C または D に勝つ場合も同様であるから,

A が 1 勝 2 敗で優勝する確率は 0 (答)

(4) 総当たりのリーグ戦でチーム A が優勝する確率は

$$p^3 + \frac{9}{4}p^2(1-p) = \frac{1}{4}p^2\{4p + 9(1-p)\} = \frac{1}{4}p^2(9-5p)$$

トーナメント戦でチーム A が優勝する確率は

$$p^2$$

大小を比べると, $0 < p < 1$ より

$$\frac{1}{4}p^2(9-5p) - p^2 = \frac{1}{4}p^2(9-5p-4) = \frac{5}{4}p^2(1-p) > 0$$

であるから, チーム A が優勝する確率の高い競技方式は

トーナメント戦 (答)

である。