

数チャレ 第2回(2001年3月)

自然数 n の正の約数の総和を $S(n)$ で表す。 $S(n) = 2001$ となる自然数 n は存在しないことを示せ。

解答

ある自然数 n に対して $S(n) = 2001$ が成り立つとして矛盾を導く。

n の素因数分解を $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ (各 p_i は相異なる素数, e_i は自然数) とすると

$$S(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{e_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{e_2}) \cdots \\ \cdots (1 + p_r + p_r^2 + \cdots + p_r^{e_r})$$

となるから, $S(n) = 2001 = 3 \times 23 \times 29$ ならば n の素因数は 3 個以下である。ところが,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 &< 23 < 29 < 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \\ 1 + 3 + 3^2 &< 23 < 29 < 1 + 3 + 3^2 + 3^3 \\ 1 + p &< 23 < 29 < 1 + p + p^2 \quad (p = 5, 7, 11, 13, 17, 19) \\ 23 < 1 + 23 &< 29 < 1 + 23 + 23^2 \\ 23 < 29 < 1 + p &\quad (p \geq 29) \end{aligned}$$

より

23 および 29 は $1 + p + p^2 + \cdots + p^k$ (p は素数, k は自然数) の形に表せない

から, n の素因数は 2 個以下である。

(i) n の素因数が 2 個のとき

一方の素因数 p は

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^{m-1} = \frac{p^m - 1}{p - 1} = 23 \times 29$$

を満たすことになり,

$$p^m = 667p - 666$$

となる。 $23 \times 29 - 1 = p + p^2 + \cdots + p^{m-1} = 666$ は素数でないから $m - 1 \geq 2$ であり, $25^2 < 23 \times 29 < 26^2$ より

$$p \leq 23$$

の場合だけ考えればよい。 $p(p^{m-1} - 667) = 666 = 2 \times 3^2 \times 37$ より $p = 2, 3$ に限られ,

$$p = 2 \text{ のとき } 667p - 666 = 668 = 2^2 \times 167 \neq 2^m$$

$$p = 3 \text{ のとき } 667p - 666 = 1335 = 3 \times 5 \times 89 \neq 3^m$$

であるから $S(n) = 2001$ とならない。

(ii) $n = p^{m-1}$ (p はただ 1 つの素因数) のとき

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^{m-1} = \frac{p^m - 1}{p - 1} = 2001$$

より

$$p^m = 2001p - 2000$$

となるが, $p(2001 - p^{m-1}) = 2000 = 2^4 \times 5^3$ より $p = 2, 5$ に限られて,

$$p = 2 \text{ のとき } 2001p - 2000 = 2002 = 2 \times 1001 \neq 2^m$$

$$p = 5 \text{ のとき } 2001p - 2000 = 8005 = 5 \times 1601 \neq 5^m$$

であるから $S(n) = 2001$ とならない。

(おわり)