

第4回問題 (2001年5月)

方程式 $(x-y)(x^2-y)(x^2+y^2) = 2001$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

解答

$x = 1$ とすれば,

$$(1-y)^2(1+y^2) = 2001 = 3 \times 23 \times 29$$

より平方因数 $(1-y)^2$ は 1 となるが, そのとき $y = 2$ (または 0) となって方程式を満たさない。よって,

$$x \neq 1 \quad \text{特に} \quad x < x^2$$

(i) $1 \leq x-y < x^2-y < x^2+y^2$ のとき

$x-y = 1$ とすれば

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2-y)(x^2+y^2) &= \{(y+1)^2-y\}\{(y+1)^2+y^2\} \\ &= (y^2+y+1)(2y^2+2y+1) \end{aligned}$$

ここで, $2y^2+2y+1 = 2y(y+1)+1$ は 4 で割ると 1 余る自然数であるが, 2001 の約数の中では $y^2+y+1 > 1$ を考えると 29, 3×23 に限られ, それぞれ

$$y(y+1) = 14 \quad \text{または} \quad 34$$

となって自然数 y は存在しない。よって,

$$1 < x-y < x^2-y < x^2+y^2$$

となるから,

$$x-y = 3, \quad x^2-y = 23, \quad x^2+y^2 = 29$$

これらをすべて満たす自然数 x, y は $x = 5, y = 2$ だけである。

(ii) $1 \leq y-x^2 < y-x < x^2+y^2$ のとき

$y-x^2 = 1$ とすれば,

$$(y-x)(y-x^2)(x^2+y^2) = (x^2-x+1)\{x^2+(x^2+1)^2\} = f(x)$$

は $x \geq 1$ で単調増加の関数であり,

$$f(3) = 763, \quad f(4) = 3965$$

であるから 2001 と一致しない。よって,

$$1 < y-x^2 < y-x < x^2+y^2$$

となるから,

$$y-x^2 = 3, \quad y-x = 23, \quad x^2+y^2 = 29$$

であるが, はじめの 2 式から $x = 5, y = 28$ となって $x^2+y^2 = 29$ を満たさない。

以上より, 求めるすべての自然数解は

$$x = 5, \quad y = 2 \quad (\text{答})$$