

## 数チャレ 第5回(2001年6月)

${}_{2001}C_{13}$  は3でちょうど何回割り切れるか。すなわち、

$${}_{2001}C_{13} = \frac{2001 \times 2000 \times 1999 \times \cdots \times 1989}{13 \times 12 \times 11 \times \cdots \times 1} = 3^m n$$

( $m, n$  は自然数,  $n$  は3で割り切れない)

と表すとき, 自然数  $m$  を求めよ。

### 解答

$p$  を2以上の自然数,  $e$  を自然数とし, 2以上の自然数  $n$  が  $p^e$  で割れて  $p^{e+1}$  で割れないものとする。1から  $n$  までにおいて  $p^k$  ( $k$  は  $1 \leq k \leq e$  を満たす自然数) で割り切

れる自然数の個数は  $\left[ \frac{n}{p^k} \right]$  ( $\frac{n}{p^k}$  の整数部分) で表されるから,  $n!$  が  $p$  で何回割れるかを表す数  $D_p(n)$  は

$$D_p(n) = \sum_{k=1}^{e-1} k \left\{ \left[ \frac{n}{p^k} \right] - \left[ \frac{n}{p^{k+1}} \right] \right\} + e \left[ \frac{n}{p^e} \right] = \sum_{k=1}^e \left[ \frac{n}{p^k} \right]$$

と求められる。

${}_{2001}C_{13} = \frac{2001!}{13!1988!}$  であるから,  $D_3(2001) - D_3(13) - D_3(1988)$  を求めればよい。

$$D_3(2001) = \sum_{k=1}^6 \left[ \frac{2001}{3^k} \right] = 667 + 222 + 74 + 24 + 8 + 2 = 997$$

$$D_3(13) = \left[ \frac{13}{3} \right] + \left[ \frac{13}{9} \right] = 4 + 1 = 5$$

$$D_3(1988) = \sum_{k=1}^6 \left[ \frac{1988}{3^k} \right] = 662 + 220 + 73 + 24 + 8 + 2 = 989$$

であるから, 求める数は

$$D_3(2001) - D_3(13) - D_3(1988) = 997 - 5 - 989 = 3 \quad (\text{答})$$