

数チャレ 第8回(2001年9月)

a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ を満たす整数とし、座標平面上に $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(a+c, b+d)$, $C(c, d)$ をとる。平行四辺形 $OABC$ の面積が 1 であるための必要十分条件は、その内部に格子点を含まないことである。これを証明せよ。ここで、格子点とは x 座標, y 座標がともに整数である点のことである。

解答

(必要性) 内部に格子点 $P(m, n)$ を含むとすれば、平行四辺形 $OABC$ の面積は 4 つの三角形 $\triangle OAP$, $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle OCP$ に分割できる。

$$(\triangle OAP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} |an - bm| \geq \frac{1}{2}$$

であり、残り 3 つの三角形についても同様であるから、

$$(\text{平行四辺形 } OABC \text{ の面積}) \geq \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

となつて、平行四辺形の面積は 1 でない。

(十分性) 平行四辺形 $OABC$ の内部に格子点を含まないとすれば、任意の格子点 P は

$$\vec{OP} = m\vec{OA} + n\vec{OC} \quad (m, n \text{ は整数})$$

と表されることになる。特に、点 P を $(1, 0)$, $(0, 1)$ にとると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

を満たす整数 p, q, r, s が存在して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

とまとめられるから、両辺の行列式をとって

$$1 = (ad - bc)(ps - qr)$$

$ad - bc$ も $ps - qr$ も整数であるから、

$$ad - bc = ps - qr = \pm 1$$

平行四辺形 $OABC$ の面積は $|ad - bc| = 1$ である。

(証明おわり)

(注) 上の証明では、行列を用いてわかりやすく表示してあるが、関係式を延々と書き並べても論じられる。しかし、行列は多変数、多変量を扱うための必須アイテムなので、これをきっかけに勉強することをおすすめする。行列が苦手な人は、基本解法確認演習「行列」で基礎から学ぶとよいだろう。