

## 数チャレ 第9回 (2001年10月)

直角三角形の3辺の長さがすべて整数であるとき、次が成り立つことを示せ。

- (1) 面積は2の整数倍である。
- (2) 直角をはさむ2辺の長さが互いに素ならば、直角をはさむ2辺の長さの和と斜辺の長さは互いに素である。

### 解答

直角をはさむ2辺の長さを  $a, b$  とし、斜辺の長さを  $c$  とすると、三平方の定理より

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ。ここで、 $a, b, c$  は正の整数である。

- (1) 面積は  $\frac{1}{2}ab$  であるから、 $ab$  が4の倍数であることを示せばよい。

(i)  $a, b$  がともに偶数であるときは、明らかに  $ab$  は4の倍数である。

(ii)  $a, b$  がともに奇数であるとき

$$a = 2m - 1, \quad b = 2n - 1 \quad (m, n \text{ は正の整数})$$

と表されるから、

$$a^2 + b^2 = 4(m^2 - m + n^2 - n) + 2$$

ところが、 $c$  は偶数で  $c^2$  は4の倍数であるから、 $a^2 + b^2 = c^2$  は満たさない。

(iii)  $a, b$  の偶奇が異なるとき

$a$  が偶数、 $b$  が奇数として一般性を失わない。

$$b = 2m - 1, \quad c = 2n - 1 \quad (m, n \text{ は正の整数})$$

とおくことができ

$$a^2 = c^2 - b^2 = 4\{n(n-1) - m(m-1)\}$$

と表される。連続する2整数の一方は偶数であるから、

$$a^2 \text{ は } 8 \text{ の倍数である。}$$

したがって、 $a$  は4の倍数であるから、特に

$$ab \text{ は } 4 \text{ の倍数である。}$$

(おわり)

- (2) 背理法で示す。

$a + b$  と  $c$  が互いに素でないとすれば、共通の素因数  $p$  が存在して

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = (a+b)^2 - c^2$$

は  $p^2$  で割り切れるから、 $a$  または  $b$  は  $p$  で割り切れる。

$a + b$  は  $p$  で割り切れるから、結局  $a$  も  $b$  も  $p$  で割り切れることになって、 $a$  と  $b$  が互いに素であるという仮定に反する。

(おわり)