

数チャレ 第13回(2002年2月)

自然数 x, y, z が $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 1$ を満たすとき, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ の最大値を求めよ。

解答

(解法1) 与えられた条件の中で x, y, z をできるだけ小さくしようと考える。

x, y, z がすべて正の整数であることと対称性より

$$1 \leq x \leq y \leq z$$

としてよい。

$$\frac{3}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 1$$

より $z > 3$ であり, x は自然数であるから

$$z \geq 4$$

次に, $z (\geq 4)$ を固定して

$$\frac{2}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \quad \therefore y > \frac{2z}{z-1} = 2 + \frac{2}{z-1}$$

ここで, $z \geq 4$ より $2 + \frac{2}{z-1} \leq 2 + \frac{2}{3} < 3$ であるから,

$$y \geq 3$$

任意の $y (\geq 3), z (\geq 4)$ に対して

$$1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \geq 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} > \frac{1}{3}$$

(i) $x \geq 3$ のとき

$$x = 3, y = 3, z = 4 \text{ で最大値 } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

をとる。

(ii) $x = 2$ のとき

$$\frac{2}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{2} \quad \therefore z > 4$$

$z (\geq 5)$ を固定して

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{2} - \frac{1}{z} = \frac{z-2}{2z} \quad \therefore y > \frac{2z}{z-2} = 2 + \frac{4}{z-2}$$

$x = 2, z = 5$ または 6 のとき

$$2 + \frac{4}{z-2} \leq 2 + \frac{4}{5-2} = 3 + \frac{1}{4} \quad \therefore y \geq 4$$

$x = 2, z \geq 7$ のとき

$$2 + \frac{4}{z-2} \leq 2 + \frac{4}{5} < 3 \quad \therefore y \geq 3$$

よって, $x = 2$ における最大値は

$$\max \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right\} = \max \left\{ \frac{19}{20}, \frac{41}{42} \right\} = \frac{41}{42}$$

(i), (ii)より

$$\{x, y, z\} = \{2, 3, 7\} \text{ のとき最大値 } \frac{41}{42} \quad (\text{答})$$

をとる。

(解法2) 多変数関数の最大値・最小値を求める基本手順に従う。

x, y, z がすべて正の整数であることと対称性より

$$1 \leq x \leq y \leq z$$

としてよい。

$2 \leq x \leq y$, $(x, y) \neq (2, 2)$ として x, y を固定すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 1 &\iff \frac{1}{z} < 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \iff z > \frac{xy}{xy - x - y} \\ y - \frac{xy}{xy - x - y} &= \frac{y(xy - 2x - y)}{xy - x - y} = \frac{y\{(x-1)(y-2) - 2\}}{xy - x - y} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} (x, y) \neq (2, 3), (2, 4), (3, 3) \text{ のとき} \\ z \geq y \text{ かつ } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 1 &\iff z \geq y \end{aligned}$$

である。

$$(x, y) = (2, 3) \text{ のとき } z > \frac{2 \times 3}{2 \times 3 - 2 - 3} = 6$$

$$(x, y) = (2, 4) \text{ のとき } z > \frac{2 \times 4}{2 \times 4 - 2 - 4} = 4$$

$$(x, y) = (3, 3) \text{ のとき } z > \frac{3 \times 3}{3 \times 3 - 3 - 3} = 3$$

を考えあわせて, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ が最大となるのは

$$(x, y, z) = (2, 3, 7), (2, 4, 5), (3, 3, 4)$$

のいずれかの場合に限られ, $(x, y, z) = (2, 5, 5), (3, 4, 4)$ の場合は最大にならないことがわかる。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

より

$$\{x, y, z\} = \{2, 3, 7\} \text{ のとき最大値 } \frac{41}{42} \quad (\text{答})$$

をとる。