

数チャレ 第16回 (2002年5月)

(1) $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす互いに素な自然数 x, y, z は, 互いに素な自然数 m, n を用いて

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

と表されることを証明せよ。

(2) $x^4 + y^4 = z^2$ を満たす自然数 x, y, z は存在しないことを証明せよ。

コメント : (2)が証明されれば, 4次のフェルマーの定理が証明されたことになる。

証明

(1) n を整数として

$$(2n)^2 = 4n^2, \quad (2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$$

となるから, 偶数の平方は4の倍数, 奇数の平方は4で割ると1余る整数となる。したがって,

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす限り, x と y がともに奇数となることはない。また, x と y は互いに素であるからともに偶数となることはない。さらに, x と y の対称性より

x が奇数, y が偶数の場合に証明すれば十分

である。

y および $x \pm z$ は偶数であることを考えて, ①を

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と変形する。 x と z は互いに素であるから,

$$\frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2} = x, \quad \frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2} = z$$

より, $\frac{z+x}{2}$ と $\frac{z-x}{2}$ は互いに素である。よって, ②より

$$\frac{z+x}{2} = m^2, \quad \frac{z-x}{2} = n^2, \quad \frac{y}{2} = mn$$

を満たす互いに素な自然数 m, n が存在して,

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(証明おわり)

$$(2) \quad x^4 + y^4 = z^2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

を満たす自然数 x, y, z が存在すると仮定して矛盾を導く。 x と y の最大公約数を g とすると、 $\textcircled{4}$ より z は g^2 で割り切れるから、あらかじめ $\textcircled{4}$ の両辺を g^4 で割っておくことにより

x と y は互いに素

として差し支えない。また、 x と y の対称性より

x は奇数、 y は偶数

として一般性を失わない。

$\textcircled{4}$ を $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$ とみると、(1) より

$$x^2 = m^2 - n^2, \quad y^2 = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

を満たす互いの素な自然数 m, n が存在する。

$x^2 + n^2 = m^2$ に (1) をあてはめると、 x が奇数であることに注意して

$$x = a^2 - b^2, \quad n = 2ab, \quad m = a^2 + b^2 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

を満たす互いに素な自然数 a, b が存在する。ここで、 x は奇数であるから a と b の偶奇は異なり、 m は奇数となることに注意すると、 $y^2 = 2mn$ より

$$m = c^2, \quad n = 2d^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

を満たす互いに素な自然数 c, d が存在する。

$\textcircled{6}$ 、 $\textcircled{7}$ の n を比べて

$$a = k^2, \quad b = l^2$$

を満たす互いに素な自然数 k, l が存在する。このとき、 $\textcircled{6}$ 、 $\textcircled{7}$ の m を比べると

$$k^4 + l^4 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 、 $\textcircled{6}$ 、 $\textcircled{5}$ とたどることにより

$$c^2 = m \leq m^2 < m^2 + n^2 = z \leq z^2 \\ \therefore c < z \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{4}$ を満たす自然数の組 (x, y, z) に対して、 $\textcircled{8}$ 、 $\textcircled{9}$ を満たす自然数の組 (k, l, c) が得られることは、ある自然数 z から始めて無限に続く自然数の列：

$$z > c = z_1 > z_2 > z_3 > \dots\dots$$

が作れることを意味し、自然数に最小値があることに反する。

(証明おわり)

(注) (2) のような証明法を無限降下法(帰納法の一つ)という。