

## 数チャレ 第20回(2002年9月)

- (1) 奇数の平方を8で割った余りを求めよ。
- (2)  $m^2 = 10^n - 1$ を満たす自然数  $m, n$  は  $m = 3, n = 1$  に限られることを示せ。
- (3) 各位が同じ数字である2桁以上の自然数は平方数でないことを証明せよ。

コメント：各位が7の場合だけは(1), (2)がヒントにならないが、どうすればよいか？

解答：

- (1) 奇数は  $2k - 1$  ( $k$  は整数) と表され、その平方は

$$(2k - 1)^2 = 4k(k - 1) + 1$$

連続する整数の一方は偶数であるから  $4k(k - 1)$  は8の倍数となり、

奇数の平方を8で割った余りは1 (答)

である。

- (2) 8で割った余りが等しいことを  $a \equiv b \pmod{8}$  で表すことにする。

自然数  $m, n$  が  $m^2 = 10^n - 1$  を満たすとき  $m$  は奇数であるから、(1)より

$$m^2 = 10^n - 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

である。ところが、

$$n = 2 \text{ のとき } 10^n - 1 \equiv 2^2 - 1 \equiv 3 \pmod{8}$$

$$n \geq 3 \text{ のとき } 10^n - 1 \equiv 2^n - 1 \equiv -1 \pmod{8}$$

となるから、 $n \geq 2$  のときは成り立たない。

(おわり)

- (3) 各位が  $a$  ( $a = 1, 2, \dots, 9$ ) である  $n$  ( $n \geq 2$ ) 桁の自然数は

$$a(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) = \frac{a(10^n - 1)}{10 - 1} = \frac{a}{9}(10^n - 1)$$

である。この値が平方数  $m^2$  ( $m$  は自然数) に一致するとすれば、

$$9m^2 = (3m)^2 = a(10^n - 1) \quad \dots\dots (*)$$

となるから、この式が成り立たないことを示せばよい。

- (i)  $a = 1$  のとき、(\*)を  $(3m)^2 = 10^n - 1$  とみれば、(2)より  $n \geq 2$  では成り立たない。

- (ii)  $a = 2$  のとき  $m$  は偶数であり、 $n \geq 2$  のとき

$$(3m)^2 \equiv 0 \text{ or } 4 \pmod{8}, \quad 2(10^n - 1) \equiv 2(2^n - 1) \equiv 6 \pmod{8}$$

となるから、(\*)は成り立たない。

- (iii)  $a = 3$  のとき、 $3(10^2 - 1) = 297$  は平方数でなく、 $n \geq 3$  のとき

$$(3m)^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 3(10^n - 1) \equiv -3 \pmod{8}$$

となるから、(\*)は成り立たない。

(iv)  $a = 4$  のとき,  $m$  は偶数であるから, (\*)を

$$\left(\frac{3m}{2}\right)^2 = 10^n - 1$$

とみれば, (2)より  $n \geq 2$  では成り立たない。

(v)  $a = 5$  のとき,  $m$  は奇数であるから  $(3m)^2 \equiv 1 \pmod{8}$  であり,

$$5(10^2 - 1) \equiv 7 \pmod{8}, \quad n \geq 3 \Rightarrow 5(10^n - 1) \equiv -5 \pmod{8}$$

となるから, (\*)は成り立たない。

(vi)  $a = 6$  のとき  $m$  は偶数であり,  $n \geq 2$  のとき

$$(3m)^2 \equiv 0 \text{ or } 4 \pmod{8}, \quad 6(10^n - 1) \equiv 6(2^n - 1) \equiv 2 \pmod{8}$$

となるから, (\*)は成り立たない。

(vii)  $a = 7$  のとき, 8 で割った余りでは矛盾が導けないないので, 5 で割った余りを考えることにすると,

$$(3m)^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}, \quad 7(10^n - 1) \equiv -7 \equiv 3 \pmod{5}$$

となるから, (\*)は成り立たない。

(viii)  $a = 8$  のとき,  $m$  は偶数であるから, (\*)を

$$9\left(\frac{m}{2}\right)^2 = 2(10^n - 1)$$

とみることにより,  $a = 2$  のときに証明済み。

(ix)  $a = 9$  のとき, (2)より  $n \geq 2$  では成り立たない。

以上により, 各位が同じ数字である 2 桁以上の自然数は平方数でない。

(おわり)

(注) 平方数の 1 の位に注目すると,  $a = 1, 4, 5, 6, 9$  だけ調べれば十分である。

さらに, 1000 が 8 の倍数であることに注目すると, 下 3 桁だけ考えて

$$111 \equiv 7, \quad 555 \equiv 3, \quad 666 \equiv 2, \quad 999 \equiv 7 \pmod{8}$$

となるから, 4 以外の場合は簡単に片付く。