

数チャレ 第21回(2002年10月)

a, b は互いに素な正の奇数であるとする。

- (1) $a + b$ と $a^2 + b^2$ の最大公約数は2であることを示せ。
(2) 一般の自然数 n に対して, $a^n + b^n$ と $a^{n+1} + b^{n+1}$ の最大公約数はどうなるか。

解答

- (1) $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + 2b^2$ と変形できることより

$$\gcd(a^2 + b^2, a + b) = \gcd(a + b, 2b^2)$$

同様に, $a^2 + b^2 = (a + b)(b - a) + 2a^2$ より

$$\gcd(a^2 + b^2, a + b) = \gcd(a + b, 2a^2)$$

したがって,

$$\gcd(a^2 + b^2, a + b) \text{ は } 2a^2 \text{ と } 2b^2 \text{ の公約数}$$

となる。ところが, a と b は互いに素であるから

$$\gcd(a + b, a^2 + b^2) \text{ は } 2 \text{ の約数}$$

一方, a と b はともに奇数であるから, $a + b$ と $a^2 + b^2$ はともに偶数であり,

$$\gcd(a + b, a^2 + b^2) \text{ は } 2 \text{ の倍数}$$

以上より

$$\gcd(a + b, a^2 + b^2) = 2$$

(おわり)

[別証] $a + b$ と $a^2 + b^2$ はともに偶数であることを考えて, $\frac{a + b}{2}$ と $\frac{a^2 + b^2}{2}$ が共通の素因数 p をもつとすれば,

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$$

より p は $\frac{a - b}{2}$ も割ることになり,

$$p \text{ は } \frac{a + b}{2} \text{ と } \frac{a - b}{2} \text{ の共通の素因数}$$

ということになる。すると, p は

$$\frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} = a, \quad \frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2} = b$$

の共通の素因数ということになり, a と b が互いに素であることに反する。

よって,

$$\frac{a + b}{2} \text{ と } \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ は互いに素}$$

となって, $a + b$ と $a^2 + b^2$ の最大公約数は2である。

(おわり)

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$$

と変形されることより

$$\gcd(a^{n+1} + b^{n+1}, a^n + b^n) = \gcd(a^n + b^n, ab(a^{n-1} + b^{n-1})) \dots\dots ①$$

整数 s が整数 t の約数であることを $s|t$ で表すことにすると、素数 p に対して

$$p|a^n + b^n \text{ かつ } p|ab$$

$$\implies p|a^n + b^n \text{ かつ “} a|p \text{ または } b|p \text{”}$$

$$\implies “p|a^n + b^n \text{ かつ } p|a \text{” または “} p|a^n + b^n \text{ かつ } p|b \text{”}$$

$$\implies “p|b^n \text{ かつ } p|a \text{” または “} p|a^n \text{ かつ } p|b \text{”}$$

$$\implies p|a \text{ かつ } p|b$$

であるから、 a と b が互いに素であるならば、この対偶によって

$$a^n + b^n \text{ と } ab \text{ は互いに素}$$

である。したがって、

$$\gcd(a^n + b^n, ab(a^{n-1} + b^{n-1})) = \gcd(a^n + b^n, a^{n-1} + b^{n-1}) \dots\dots ②$$

①, ②より、帰納的に

$$\gcd(a^{n+1} + b^{n+1}, a^n + b^n) = \gcd(a^2 + b^2, a + b) = 2 \quad (\text{答})$$

が導かれる。