

## 数チャレ 第23回 (2002年12月)

自然数  $n$  に対して, 整数  $f(n)$  を次の規則で定める。

(i)  $f(1) = 1$

(ii) 素数  $p$ , 自然数  $a$  に対して  $f(p^a) = p^a \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

(iii) 自然数  $m, n$  が互いに素のとき  $f(mn) = f(m)f(n)$

このとき, 次のことを証明せよ。

(1)  $f(n) = \frac{1}{3}n$  となる自然数  $n$  は,  $2^a 3^b$  ( $a, b$  は自然数) と表される。

(2)  $p$  を 5 以上の素数とすると,  $f(n) = \frac{1}{p}n$  となる自然数  $n$  は存在しない。

解答

$n$  の素因数分解を

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \quad (a_r \text{ は自然数})$$

とすると, 条件(iii), (ii)より

$$\begin{aligned} f(n) &= f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_r^{a_r}) \\ &= p_1^{a_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times p_2^{a_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \cdots \times p_r^{a_r} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ \therefore \frac{f(n)}{n} &= \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)}{p_1 p_2 \cdots p_r} \end{aligned}$$

(1)  $\frac{f(n)}{n} = \frac{1}{3}$  のとき

$$p_1 p_2 \cdots p_r = 3(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

3が素数であることより  $p_1, p_2, \dots, p_r$  の中に3が含まれ,  $p_1 = 3$  とすると

$$p_2 \cdots p_r = 2(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

同様に,  $p_2 = 2$  とすることができて,  $r \geq 3$  とすると,

$$p_3 \cdots p_r = (p_3 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

の左辺は奇数, 右辺は偶数となって矛盾する。

よって,  $r = 2$  であり,

$$n = 2^a 3^b \quad (a, b \text{ は自然数})$$

と表される。

(おわり)

(2) 5 以上のある素数  $p$  に対して,  $f(n) = \frac{1}{p}n$  が成り立つと仮定すると

$$p_1 p_2 \cdots p_r = p(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

と表される。

(a)  $p \equiv 1 \pmod{4}$  のとき, 素数  $p_1, p_2, \dots, p_r$  のいずれかは素数  $p$  と一致するから,  $p_1 = p$  として一般性を失わない。このとき,

$$p_2 \cdots p_r = (p - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

の右辺は 4 で割り切れて, 左辺は平方因数をもたないから矛盾する。

(b)  $p \equiv 3 \pmod{4}$  のとき

$$p - 1 = 2q \quad (q \text{ は } 3 \text{ 以上の奇数})$$

と表されるから, (a) と同様に  $p_1 = p$  として

$$p_2 \cdots p_r = 2q(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

が成り立つ。この左辺は 2 以外に  $q$  の素因数を含むから

$$r \geq 3$$

であり,  $p_2 = 2$  とすると

$$p_3 \cdots p_r = q(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

となって, 左辺は奇数である。ところが,  $r \geq 3$  より, 右辺は偶数となるから矛盾する。

ゆえに, 5 以上の素数  $p$  に対して,  $f(n) = \frac{1}{p}n$  となる自然数  $n$  は存在しない。

(おわり)

(注) 一見, (a) と (b) の場合分けは不要に思われるが, (a) のタイプには  $17 = 2^4 + 1$  のように  $p - 1$  が 2 のべき (素因数が 2 だけ) である素数  $p$  も含まれるので, (b) と同様に論じることができない。