

数チャレ 第24回 (2003年1月)

$x^2 + y^2 + z^2 = 2003$ をみたす自然数 x, y, z を求めよ。ただし, x, y, z が入れ替わっただけの組は同一視する。

コメント：パソコンに計算させれば簡単に答が出せますが、手計算で求めるとすればどのような考察になるか、という構造を問う問題です。

解答

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2003 \quad \dots\dots ①$$

n を整数として

$$(2n)^2 = 4n^2, \quad (2n+1)^2 = 4(n^2+n)+1$$

となるから, 平方数を4で割った余りは0または1である。①より

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

であるから,

$$x, y, z \text{ はすべて奇数}$$

である。同様に

$$(3n)^2 = 3(3n^2), \quad (3n \pm 1)^2 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1$$

より, 平方数を3で割った余りは0または1であり, ①より

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

であるから,

$$x, y, z \text{ のうち1つだけは3の倍数}$$

となる。したがって,

$$x = 6u + 3, \quad y = 2v + 1, \quad z = 2w + 1 \quad (v \leq w) \quad \dots\dots ②$$

とにおいて一般性を失わない。ただし, u, v, w は0以上の整数である。

①に②を代入して

$$9(2u+1)^2 + (2v+1)^2 + (2w+1)^2 = 2003$$

$$9(4u^2 + 4u) + (4v^2 + 4v) + (4w^2 + 4w) = 1992$$

$$\therefore 9 \cdot \frac{u(u+1)}{2} + \frac{v(v+1)}{2} + \frac{w(w+1)}{2} = 249 \quad \dots\dots ③$$

ここで,

$$9 \times \frac{6 \times 7}{2} = 189, \quad 9 \times \frac{7 \times 8}{2} = 252$$

に注目すると, ②より u のとり得る値は

$$u = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$$

である。

249 以下の三角数を列挙すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253

となるから, u について場合分けして

(i) $u = 6$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2} + \frac{w(w+1)}{2} = 60 \quad (v \leq w) \quad \therefore (v, w) = (5, 9)$$

(ii) $u = 5$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2} + \frac{w(w+1)}{2} = 114 \quad (v \leq w) \quad \therefore (v, w) = (8, 12)$$

(iii) $u = 4$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2} + \frac{w(w+1)}{2} = 159 \quad (v \leq w) \quad \therefore (v, w) = (3, 17)$$

(iv) $u = 3$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2} + \frac{w(w+1)}{2} = 195 \quad (v \leq w) \quad \therefore v, w \text{ は存在しない}$$

(v) $u = 2$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2} + \frac{w(w+1)}{2} = 222 \quad (v \leq w) \quad \therefore v, w \text{ は存在しない}$$

(vi) $u = 1$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2} + \frac{w(w+1)}{2} = 240 \quad (v \leq w) \quad \therefore (v, w) = (15, 15)$$

(vii) $u = 0$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2} + \frac{w(w+1)}{2} = 249 \quad (v \leq w) \quad \therefore (v, w) = (12, 18)$$

以上で得られた結果

$$(u, v, w) = (0, 12, 18), (1, 15, 15), (4, 3, 17), (5, 8, 12), (6, 5, 9)$$

を②に代入すると,

$$(x, y, z) = (3, 25, 37), (9, 31, 31), (27, 7, 35), (36, 17, 25), (39, 11, 19)$$

見やすいように辞書式順序に並べて, ①を満たす自然数の組は

$$(3, 25, 37), (9, 31, 31), (7, 27, 35), (11, 19, 39), (17, 25, 36) \quad (\text{答})$$