

## 数チャレ 第26回(2003年3月)

$p$  を素数とする。 $x$  に関する2次方程式

$$px^2 + (5 - p^2)x - 3p = 0$$

が整数の解をもつのは  $p = 2$  のときに限ることを示せ。

出典：2003年 千葉大学 理学部

証明

2次方程式の解は

$$x = \frac{p^2 - 5 \pm \sqrt{(p^2 - 5)^2 + 12p^2}}{2p}$$

であるから、整数解をもつためには

$$(p^2 - 5)^2 + 12p^2 = m^2$$

となる自然数  $m$  の存在が必要である。このとき

$$12p^2 = m^2 - (p^2 - 5)^2 = (m + p^2 - 5)(m - p^2 + 5)$$

ここで、

$$(m + p^2 - 5) - (m - p^2 + 5) = 2(p^2 - 5) \text{ は偶数}$$

であるから2数の偶奇は等しく、2数の積は偶数であるから

$$m + p^2 - 5, m - p^2 + 5 \text{ はともに偶数}$$

である。 $p$  が3以上の素数であるとすれば、

$$3p^2 = \frac{m + p^2 - 5}{2} \cdot \frac{m - p^2 + 5}{2}$$

において  $p^2 - 5 > 0$  であり、

$$\frac{m + p^2 - 5}{2} > 0, \quad \frac{m + p^2 - 5}{2} > \frac{m - p^2 + 5}{2}$$

となるから、積の組合せは

$$\left( \frac{m + p^2 - 5}{2}, \frac{m - p^2 + 5}{2} \right) = (3p^2, 1), (3p, p), (p^2, 3)$$

に限られる。

(i)  $\frac{m + p^2 - 5}{2} = 3p^2, \quad \frac{m - p^2 + 5}{2} = 1$  のとき

$$3p^2 - 1 = \frac{m + p^2 - 5}{2} - \frac{m - p^2 + 5}{2} = p^2 - 5$$

となるが、これは  $p^2 - 5 < p^2 - 1 < 3p^2 - 1$  であることに反する。

(ii)  $\frac{m + p^2 - 5}{2} = 3p, \quad \frac{m - p^2 + 5}{2} = p$  のとき

$$3p - p = \frac{m + p^2 - 5}{2} - \frac{m - p^2 + 5}{2} = p^2 - 5$$

$$p^2 - 2p - 5 = 0 \quad \therefore p = 1 \pm \sqrt{6}$$

これは  $p$  が素数(整数)であることに反する。

$$(iii) \quad \frac{m + p^2 - 5}{2} = p^2, \quad \frac{m - p^2 + 5}{2} = 3 \text{ のとき}$$

$$p^2 - 3 = \frac{m + p^2 - 5}{2} - \frac{m - p^2 + 5}{2} = p^2 - 5$$

となるが, この等式は成り立たない。

以上より,  $x$  の方程式  $px^2 + (5 - p^2)x - 3p = 0$  ( $p$  は素数) が整数解をもつのは,  $p = 2$  のときに限られる。なお,  $p = 2$  のとき 2 次方程式は

$$2x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x + 2)(2x - 3) = 0$$

となって, 実際に整数解  $x = -2$  をもつ。

(証明おわり)

### 別証

整数解を  $n$  とすると

$$pn^2 + (5 - p^2)n - 3p = 0 \quad \dots\dots (*)$$

$p$  を含む項と含まない項に分けて

$$5n = p(-n^2 + pn + 3)$$

$p$  は素数であるから

$$p = 5 \quad \text{または} \quad n \text{ は } p \text{ の倍数}$$

(i)  $p = 5$  のとき, (\*) は

$$5(n^2 - 4n - 3) = 0 \quad \therefore n = 2 \pm \sqrt{7}$$

よって,  $n$  が整数であることに反する。

(ii)  $n$  が  $p$  の倍数のとき

$$n = pq \quad (q \text{ は整数})$$

と表すことができ, (\*) より

$$\begin{aligned} p(pq)^2 + (5 - p^2)pq - 3p \\ p^2q^2 + (5 - p^2)q - 3 = 0 \quad \therefore q(p^2q - p^2 + 5) = 3 \end{aligned}$$

$q$  および  $p^2q - p^2 + 5$  は整数であるから, 3 の約数を考えて

$$(q, p^2q - p^2 + 5) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$$

$q = 1$ ,  $p^2q - p^2 + 5 = 3$  のとき,  $5 = 3$  となって矛盾。

$q = -1$ ,  $p^2q - p^2 + 5 = -3$  のとき,  $p^2 = 4$   $\therefore p = 2$

$q = 3$ ,  $p^2q - p^2 + 5 = 1$  のとき,  $p^2 = -2$  となって  $p$  は整数とならない。

$q = -3$ ,  $p^2q - p^2 + 5 = -1$  のとき,  $2p^2 = 3$  となって  $p$  は整数とならない。

$p = 2$  のとき, (\*) は

$$2n^2 + n - 6 = (n + 2)(2n - 3) = 0 \quad \therefore n = -2$$

以上より, (\*) を満たす素数  $p$  と整数  $n$  は

$$p = 2, \quad n = -2$$

に限られる。

(証明おわり)