

## 数チャレ 第29回 (2003年6月)

$a, b$  を正の整数とする。

- (1)  $n$  を 2 以上の整数,  $k$  を  $1 \leq k \leq n-1$  なる整数とするとき,  
 $a^n + b^n$  が  $a^k b^{n-k}$  で割り切れるならば  $a = b$   
 であることを示せ。
- (2)  $n$  を 3 以上の整数,  $k$  を  $1 \leq k \leq n-2$  なる整数とするとき,  
 $a^n + b^n$  は  $a^k b^{n-k-1}$  で割り切れるが  $a \neq b$   
 であるような  $(a, b)$  の組は無数に存在することを示せ。

### 解答

- (1)  $a^n + b^n$  が  $a^k b^{n-k}$  で割り切れるとすれば,

$$a^n + b^n = m a^k b^{n-k} \quad (m \text{ は正の整数})$$

と表される。  $\gcd(a, b) = d$  とおくと,

$$\left(\frac{a}{d}\right)^n + \left(\frac{b}{d}\right)^n = m \left(\frac{a}{d}\right)^k \left(\frac{b}{d}\right)^{n-k}$$

$$\therefore \left(\frac{b}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{d}\right)^k \left\{ m \left(\frac{b}{d}\right)^{n-k} - \left(\frac{a}{d}\right)^{n-k} \right\}$$

$\left(\frac{b}{d}\right)^n$  は  $\frac{a}{d}$  の倍数であるが,  $\frac{a}{d}$  と  $\frac{b}{d}$  は互いに素であるから,

$$\frac{a}{d} = 1$$

$a$  と  $b$  の役割を交換して考えれば, 同様に

$$\frac{b}{d} = 1 \quad \therefore a = b = d$$

(おわり)

- (2)  $p$  を任意の素数として  $a = p^{k+1}$ ,  $b = p^k$  とすると,

$$a^k b^{n-k-1} = p^{k(k+1)+k(n-k-1)} = p^{kn}$$

は  $a^n$  も  $b^n$  も割るから,  $a^n + b^n$  は  $a^k b^{n-k-1}$  で割り切れるが  $a \neq b$  である。

素数  $p$  は無数にあるから,  $(a, b) = (p^{k+1}, p^k)$  も無数にある。 (おわり)

### (注)

1° 一見, (1) の仮定は強すぎるように思えるが, それが実質的な限界であることを (2) は示している。

2° 素数が無数にあることは有名であり, (2) ではその証明を省略しているが, 例えば次のようにして示すことができる。

素数が  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (有限個) しかないとすれば,  $q = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$  は  $p_1, p_2, \dots, p_n$  のいずれとも互いに素であるから,  $q$  の素因数は  $p_1, p_2, \dots, p_n$  以外の素数となって矛盾する。