

数チャレ 第30回 (2003年7月)

6つの整数 $a, b, c, a+b, b+c, c+a$ を適当に並べ替えると、連続する6つの整数となる。ただし、 $a < b < c$ とする。

- (1) a, b, c が正の整数のとき、 (a, b, c) の組をすべて求めよ。
(2) 整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

解答

- (1) $0 < a < b < c$ より、大小関係が

$$a < b < \left\{ \begin{array}{c} c \\ a+b \end{array} \right\} < c+a < b+c$$

と定まるから、連続する6整数になるとすれば

$$b-a=1 \quad \text{かつ} \quad (c+a)-a=c=4$$

となり、 $1 \leq a < b < 4$ より次に2つの場合が考えられる。

- (i) $a=1, b=2, c=4$ のとき

$$a+b=3, \quad c+a=5, \quad b+c=6 \quad \text{となって十分}$$

- (ii) $a=2, b=3, c=4$ のとき

$$a+b=5, \quad c+a=6, \quad b+c=7 \quad \text{となって十分}$$

以上より

$$(a, b, c) = (1, 2, 4), (2, 3, 4) \quad (\text{答})$$

- (2) まず、 $c \neq c+a, a \neq a+b, b \neq b+c$ より

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$$

1° $0 < a < b < c$ のとき、(1)より

$$(a, b, c) = (1, 2, 4), (2, 3, 4)$$

2° $a < 0 < b < c$ のとき

$$a < a+b < \left\{ \begin{array}{c} b \\ c+a \end{array} \right\} < c < b+c$$

であるから、連続する6整数になるとすれば

$$(a+b)-a=b=1 \quad \text{かつ} \quad (b+c)-(a+b)=c-a=4$$

- (i) $a=-2, b=1, c=2$ のとき

$$a+b=-1, \quad c+a=0, \quad b+c=3 \quad \text{となって十分}$$

- (ii) $a=-1, b=1, c=3$ のとき

$$a+b=0, \quad c+a=2, \quad b+c=4 \quad \text{となって十分}$$

よって、

$$(a, b, c) = (-2, 1, 2), (-1, 1, 3)$$

3° $a < b < 0 < c$ のとき

$$-c < 0 < -b < -a$$

であるから, 2° より

$$(-c, -b, -a) = (-2, 1, 2), (-1, 1, 3)$$

$$\therefore (a, b, c) = (-2, -1, 2), (-3, -1, 1)$$

4° $a < b < c < 0$ のとき

$$0 < -c < -b < -a$$

であるから, (1)より

$$(-c, -b, -a) = (1, 2, 4), (2, 3, 4)$$

$$\therefore (a, b, c) = (-4, -2, -1), (-4, -3, -2)$$

以上より, 条件を満たす整数の組は

$$(a, b, c) = (1, 2, 4), (2, 3, 4), (-2, 1, 2), (-1, 1, 3)$$

$$(-2, -1, 2), (-3, -1, 1), (-4, -2, -1),$$

$$(-4, -3, -2)$$

(答)