

## 数チャレ 第32回 (2003年9月)

数列  $\{a_n\}$  を漸化式

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2$$

によって定める。このとき、任意の異なる自然数  $m, n$  に対して、 $a_m$  と  $a_n$  は互いに素な整数であることを示せ。

解答

$a_1 = 3$  であり、 $a_n$  が奇数ならば  $a_{n+1} = a_n^2 - 2$  も奇数であるから、  
任意の自然数  $n$  に対して、 $a_n$  は奇数

である。

与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n^2 - 2 \\ a_{n+2} &= a_{n+1}^2 - 2 \\ &= (a_n^2 - 2)^2 - 2 \\ &= a_n^4 - 4a_n^2 + 2 \\ &= a_n(a_n^3 - 4a_n) + 2 \end{aligned}$$

$a_{n+k} = a_n q_k + 2$  ( $q_k$  は整数) と表されるとすれば、

$$\begin{aligned} a_{n+k+1} &= a_{n+k}^2 - 2 \\ &= (a_n q_k + 2)^2 - 2 \\ &= a_n^2 q_k^2 + 4a_n q_k + 2 \end{aligned}$$

ここで、 $q_{k+1} = a_n q_k^2 + 4q_k$  とおくと、 $q_{k+1}$  も整数であり、

$$a_{n+k+1} = a_n q_{k+1} + 2$$

以上より、 $m > n$  のとき、整数  $q_{m-n}$  を用いて

$$a_m = \begin{cases} a_n q_{m-n} - 2 & (m = n + 1) \\ a_n q_{m-n} + 2 & (m \geq n + 2) \end{cases}$$

と表されるから、互除法の原理により

$$\gcd(a_m, a_n) = \gcd(a_n, 2) = 2 \text{ or } 1$$

ところが、 $a_n$  は奇数であるから

$$\gcd(a_m, a_n) = 1$$

すなわち、 $a_m$  と  $a_n$  は互いに素である。 $m < n$  の場合も同様である。 (おわり)