

## 数チャレ 第33回(2003年10月)

任意の自然数  $n$  に対して、連続する  $2n + 1$  個の自然数  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$  で

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n+1}$$

を満たすものがただ 1 組存在することを示し、

$$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}\}$$

を求めよ。

また、 $n$  と  $m$  を異なる自然数とすると、 $A_n$  と  $A_m$  の両方に属する自然数は存在しないことを示せ。

解答

$a_1 = a$  とおくと、

$$a_{n+1} = a + n, \quad a_{n+2} = a + n + 1, \quad a_{2n+1} = a + 2n$$

であり、等差数列の和の公式より

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = \frac{n+1}{2}(a_1 + a_{n+1}) = \frac{n+1}{2}(2a + n)$$

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n+1} = \frac{n}{2}(a_{n+2} + a_{2n+1}) = \frac{n}{2}(2a + 3n + 1)$$

であるから、両者が等しいとき

$$(n+1)(2a+n) = n(2a+3n+1)$$

ここで、 $n+1$  と  $n$  は互いに素であるから、

$$2a+n = nk, \quad 2a+3n+1 = (n+1)k$$

を満たす自然数  $k$  が存在することが必要である。この 2 式を  $a, k$  についての連立方程式として解くと

$$k = 2n + 1, \quad a = n^2$$

となり、任意の  $n$  に対して初項  $a$  が定まるから、条件を満たす自然数の組  $A_n$  はただ 1 組存在する。このとき、

$$A_n = \{n^2, n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n\} \quad (\text{答})$$

である。

自然数  $m$  に対しても

$$A_m = \{m^2, m^2 + 1, m^2 + 2, \dots, m^2 + 2m\}$$

と一意に定まり、

$$n < m \implies n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \leq m^2$$

$$n > m \implies m^2 + 2m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 \leq n^2$$

であるから、

$$n \neq m \implies A_n \cap A_m = \phi \quad (\text{おわり})$$

(注) 結局、自然数全体の集合は  $\{A_n\}$  の disjoint union となる：

$$1 + 2 = 3, \quad 4 + 5 + 6 = 7 + 8, \quad 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15, \quad \dots\dots$$