

数チャレ 第35回(2003年12月)

すべての辺の長さが整数である直角三角形において、斜辺の長さが素数 p の平方、内接円の半径 r が素数であるとき、素数の組 (p, r) をすべて求めよ。

解答

直角をはさむ2辺の長さを $m+r$, $n+r$ とおくと、 m と n は整数であり、円の外部の点から円に引いた接線の長さは等しいから、

$$(\text{斜辺の長さ}) = p^2 = m+n$$

ピタゴラスの定理(三平方の定理)より

$$(m+n)^2 = (m+r)^2 + (n+r)^2$$

$$2mn = 2mr + 2nr + 2r^2$$

$$mn = mr + nr + r^2$$

$$\therefore (m-r)(n-r) = 2r^2$$

r は素数で $m > r$, $n > r$ であるから、 $m \geq n$ とすると

$$(m-r, n-r) = (2r, r), (r^2, 2), (2r^2, 1)$$

(i) $m-r = 2r$, $n-r = r$ のとき

$$p^2 = m+n = (2r+r) + (r+r) = 5r$$

p は素数であるから、

$$p = r = 5$$

(ii) $m-r = r^2$, $n-r = 2$ のとき

$$p^2 = (r^2+r) + (2+r) = (r+1)^2 + 1$$

$$p^2 - (r+1)^2 = 1$$

$$(p+r+1)(p-r-1) = 1$$

このとき、 $2p = \pm 1$, $r+1 = 0$ となって不適。

(iii) $m-r = 2r^2$, $n-r = 1$ のとき

$$p^2 = (2r^2+r) + (r+1) = r^2 + (r+1)^2$$

$$p^2 - (r+1)^2 = r^2$$

$$\therefore (p+r+1)(p-r-1) = r^2$$

$p+r+1 > 0$, $p+r+1 > p-r-1$ であり、 r は素数であるから、

$$p+r+1 = r^2, \quad p-r-1 = 1$$

p を消去すると $2(r+1) = r^2 - 1$ となって、

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$(r+1)(r-3) = 0$$

r は素数であるから、

$$r = 3, \quad p = r+2 = 5$$

以上より、求める素数の組 (p, r) は

$$(p, r) = (5, 5), (5, 3) \quad (\text{答})$$