

## 数チャレ 第37回(2004年2月)

$a$  を整数定数とする。 $x$  の2次方程式

$$x^2 - (2a - 5)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$$

の2解がともに整数となるような  $a$  の値を求めよ。

コメント：2004年のセンター試験の問題を解いた人ならピンときますね。

解答

$x$  の2次方程式

$$x^2 - (2a - 5)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

の2解がともに整数であるから、

$$(\text{判別式}) = (2a - 5)^2 - 4(2a^2 - 5a - 3) = -4a^2 + 37$$

が平方数になることが必要であり、

$$-4a^2 + 37 = b^2 \quad (b \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表される。 $b^2 \geq 0$  より

$$a^2 \leq \frac{37}{4} = 9 + \frac{1}{4}$$

$a$  は整数であるから、

$$a = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$37 - 4a^2$  が平方数  $b^2$  になり得るのは、

$$a = \pm 3$$

のときである。

$a = 3$  のとき

$$(*) \text{ は } x^2 - x = 0, \quad 2 \text{ 解は } x = 0, 1$$

$a = -3$  のとき

$$(*) \text{ は } x^2 + 11x + 30 = 0, \quad 2 \text{ 解は } x = -5, -6$$

となって十分である。

よって、求める  $a$  の値は

$$a = \pm 3 \quad (\text{答})$$

(注) 整数係数2次方程式において

$$\text{「2解が整数」} \iff \text{「2解が有理数」} \iff \text{「判別式が平方数」}$$