

数チャレ 第38回(2004年3月)

m は 3 以上の整数, α は

$$\cos \alpha = \frac{1}{m}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数とする。

- (1) $a_n = m^n \cos n\alpha$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, a_n は整数であることを示せ。
- (2) $\frac{\alpha}{\pi}$ は無理数であることを示せ。

コメント: m が 2^k (k は 2 以上の整数) であるか, 奇数の素因数をもつかで場合分けします。

解答

(1) 加法定理と仮定より

$$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2 \cos n\alpha \cos \alpha = \frac{2}{m} \cos n\alpha$$

両辺に m^{n+1} をかけると, 漸化式

$$a_{n+1} + m^2 a_{n-1} = 2a_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が得られる。

$$a_1 = m \cos \alpha = 1$$

であり, 2 倍角の公式より

$$a_2 = m^2(2 \cos^2 \alpha - 1) = 2 - m^2$$

a_{n-1}, a_n が整数であるとすれば, ①より a_{n+1} も整数となるから,

すべての自然数 n に対して a_n は整数である。 (おわり)

(2) $\frac{\alpha}{\pi}$ が有理数であるとすれば, ある自然数 N に対して $\frac{N\alpha}{\pi}$ は整数となる。

このとき, $\cos N\alpha = \pm 1$, $N \geq 2$ であり,

$$a_N = \pm m^N \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i) $m = 2^k$ (k は 2 以上の整数) のとき

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2 - 2^{2k} = 2(1 - 2^{2k-1}) \quad (2k - 1 \geq 3)$$

$a_{n-1} = 2^{n-2} b_{n-1}$, $a_n = 2^{n-1} b_n$ (b_{n-1}, b_n は奇数) と表されるとすれば, ①より

$$a_{n+1} = 2a_n - 2^{2k} a_{n-1} = 2^n (b_n - 2^{2k-2} b_{n-1})$$

であるから, $b_{n+1} = b_n - 2^{2k-2} b_{n-1}$ ($2k - 2 \geq 2$) とおくと

$$a_{n+1} = 2^n b_{n+1} \quad (b_{n+1} \text{ は奇数})$$

と表される。よって,

$$a_N = 2^{N-1} b_N \quad (b_N \text{ は奇数})$$

と表される。ところが, ②より

$$a_N = \pm 2^{2kN}$$

であるから, 矛盾する。

(ii) m が 3 以上の奇数の素因数 p をもつとき

2 と p は互いに素であるから, ①より

$$n \geq 2 \text{ のとき } p \mid a_{n+1} \implies p \mid a_n$$

となって, ②が成り立つならば a_2 は p の倍数となる。ところが, $a_2 = 2 - m^2$ は p で割り切れないから, 矛盾する。

以上より, $\frac{\alpha}{\pi}$ は無理数である。

(おわり)