

数チャレ 第39回 (2004年4月)

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ と関係式

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき, 次の問に答えよ。

- (1) $a_n < a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。
- (2) $a_{n+1}^2 + 1 = a_n a_{n+2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。
- (3) $x^2 + 1$ が y で割り切れ, かつ $y^2 + 1$ が x で割り切れるような正の整数の組 (x, y) は無限個存在することを証明せよ。

出典: 2004年 横浜国立大学 経済学部

解答

- (1) $0 < a_n < a_{n+1}$ が成り立つことを, n についての数学的帰納法で示す。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$

より $n = 1$ のときは成り立つ。

$0 < a_k < a_{k+1}$ が成り立つとすれば, 与えられた漸化式より

$$a_{k+2} - a_{k+1} = 2a_{k+1} - a_k > 2a_k - a_k = a_k > 0$$

$$\therefore a_{k+2} > a_{k+1} \quad (> 0) \quad (\text{証明おわり})$$

- (2) 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_{n+3} - a_{n+2}^2 &= a_{n+1}(3a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n+2}(3a_{n+1} - a_n) \\ &= a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 \end{aligned}$$

よって, $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2$ は定数であるから

$$\begin{aligned} a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 &= a_1 a_3 - a_2^2 \\ &= a_1(3a_2 - a_1^2) - a_2^2 \\ &= 1 \times (3 \times 2 - 1^2) - 2^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{証明おわり})$$

(注) 漸化式を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_{n+3} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

この両辺の行列式をとると, 直ちに

$$a_{n+1}a_{n+3} - a_{n+2}^2 = a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2$$

が得られる。

(3) 数学的帰納法により, すべての自然数 n に対して a_n が整数であることが示され,
(2)より

$$\begin{cases} a_n^2 + 1 = a_{n-1}a_{n+1} \\ a_{n+1}^2 + 1 = a_n a_{n+2} \end{cases}$$

であるから, $a_n^2 + 1$ は a_{n+1} で割り切れ, $a_{n+1}^2 + 1$ は a_n で割り切れる。

(1)より

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

であるから, $x^2 + 1$ が y で割り切れ, $y^2 + 1$ が x で割り切れるような正の整数の組 (x, y) は無数に存在する。 (証明おわり)