

数チャレ 第40回 (2004年5月)

- (1) $\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2$ を計算せよ。
- (2) 連続する立方数の和 S が偶数ならば, S は4で割り切れることを示せ。なお, 立方数とは, ある整数の3乗で表される数のことである。

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2 &= \frac{1}{4}n^2\{(n+1)^2 - (n-1)^2\} \\ &= \frac{1}{4}n^2 \cdot 4n \\ &= n^3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $S = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + \cdots + (n+m)^3$ (m は自然数) とすると, (1)より

$$\begin{aligned} n^3 &= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2 \\ (n+1)^3 &= \left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \\ (n+2)^3 &= \left\{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right\}^2 \\ &\vdots \\ +) (n+m)^3 &= \left\{\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}(n+m-1)(n+m)\right\}^2 \\ \hline S &= \left\{\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2 \end{aligned}$$

S が偶数であるとするれば, $\left\{\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)\right\}^2$, $\left\{\frac{1}{2}(n+m-1)(n+m)\right\}^2$ はともに偶数, またはともに奇数であり,

$$S = (\text{偶数})^2 - (\text{偶数})^2 \quad \text{または} \quad S = (\text{奇数})^2 - (\text{奇数})^2$$

の形をしている。

一方, 任意の偶数の平方は4の倍数であり, 任意の奇数の平方は

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

より4で割ると1余る整数であるから,

S は4で割り切れる。

(おわり)