

数チャレ 第41回(2004年6月)

不等式 $x^2 - 2ax + 4 < 0$ を満たす整数 x がただ1つ存在するような実数 a の範囲を求めよ。

解答

$$f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4$$

とおく。必要条件として $f(x) < 0$ となる実数 x が存在するから、

$$-a^2 + 4 < 0 \quad \therefore a < -2 \text{ または } a > 2$$

(i) $a < -2$ のとき

$$f(-2) = 4(2 + a) < 0$$

であるから、ただ1つの整数解は $x = -2$ であり、条件は

$$f(-1) = 2a + 5 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad f(-3) = 6a + 13 \geq 0$$

$$\therefore -\frac{13}{6} \leq a < -2$$

(ii) $a > 2$ のとき

$$f(2) = 4(2 - a) < 0$$

であるから、ただ1つの整数解は $x = 2$ であり、条件は

$$f(1) = -2a + 5 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad f(3) = -6a + 13 \geq 0$$

$$\therefore 2 < a \leq \frac{13}{6}$$

以上より、求める a の範囲は

$$-\frac{13}{6} \leq a < -2 \quad \text{または} \quad 2 < a \leq \frac{13}{6} \quad (\text{答})$$