

数チャレ 第42回(2004年7月)

n を自然数とする。

- (1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ が 3 の倍数となる n を求めよ。
(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 3m^2$ (m は自然数) と表せないことを示せ。

解答

- (1) 平方数を 3 で割った余りに注目すると, k を整数として

$$(3k)^2 = 3(3k^2), \quad (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$$

と表されるから, 数列 $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ について

3 で割った余りは $1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$ とくり返す

ことがわかる。

よって, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ が 3 の倍数となる n は

9 で割ると余りが $4, 8, 0$ のいずれかとなる数 (答)

である。

- (2) 和の公式より

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

この値が $3m^2$ (m は自然数) と表されるとすれば,

$$n(n+1)(2n+1) = 18m^2 = 2(3m)^2$$

$n, n+1, 2n+1 = 2(n+1) - 1$ はどの 2 つも互いに素であるから,

$$(i) \quad n = a^2, \quad n+1 = b^2, \quad 2n+1 = 2c^2$$

$$(ii) \quad n = a^2, \quad n+1 = 2b^2, \quad 2n+1 = c^2$$

$$(iii) \quad n = 2a^2, \quad n+1 = b^2, \quad 2n+1 = c^2$$

のいずれかの形に分解される。ただし, a, b, c は自然数である。

- (i) $b^2 - a^2 = (n+1) - n$ より

$$(b+a)(b-a) = 1$$

であるから,

$$b+a = b-a = \pm 1 \quad \therefore a=0, b=\pm 1$$

よって, a が自然数であることに反する。

- (ii) $c^2 = 2(n+1) - 1 = 2(2b^2) - 1$ より

$$1 = 4b^2 - c^2 = (2b+c)(2b-c)$$

(i) と同様に $c=0$ となって矛盾する。

- (iii) $c^2 = 2(2a^2) + 1$ より

$$1 = c^2 - 4a^2 = (c+2a)(c-2a)$$

(i) と同様に $a=0$ となって矛盾する。

以上より, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 3m^2$ を満たす自然数 n, m は存在しない。

(おわり)