

## 数チャレ 第43回(2004年8月)

2以上の整数  $a, b$  が互いに素であるとき,  $ab + 1$  以上の任意の整数  $z$  に対して,

$$z = am + bn$$

を満たす正の整数  $m, n$  が存在することを証明せよ。

解答

必要ならば,  $a$  と  $b$  を入れかえて考えることにより,

$$a > b$$

の場合だけ証明すれば十分である。

$1 \leq c < b$  なる整数  $c$  に対して,

$$\begin{aligned} ab + c &= a(b-1) + a + c \\ &= a(b-2) + 2a + c \\ &\vdots \\ &= a \cdot 1 + (b-1)a + c \end{aligned}$$

のように  $b$  通りに表される。ここで,  $a$  と  $b$  が互いに素であることより,  $b$  個の数

$$c, a + c, 2a + c, \dots, (b-1)a + c$$

はどの2つも  $b$  で割った余りは異なるから,

$$ka + c = bp \quad (0 \leq k \leq b-1)$$

と表されるような整数  $k$  と正の整数  $p$  が存在する。このとき,

$$b - k = m$$

は正の整数であり,  $c = 1, 2, \dots, b-1$  に対しては

$$ab + c = am + bp \quad (m, p \text{ は正の整数})$$

と表される。

$ab + 1$  以上の任意の整数  $z$  に対して,

$$z - bq = ab + c = am + bp$$

を満たす非負整数  $q$  が存在するから,  $n = p + q$  とおけば

$$z = am + bn, \quad n = p + q \geq p > 0$$

と表される。

(証明おわり)

(注)  $ab = am + bn$  ( $m, n$  は正の整数)とおくと

$$a(b-m) = bn$$

と表され,  $a$  と  $b$  が互いの素であることより

$$b-m = bk \quad \text{かつ} \quad n = ak \geq 1$$

を満たす整数  $k$  が存在する。ところが, このとき

$$1-k \geq 1 \quad \text{かつ} \quad k \geq 1$$

となって矛盾するから,  $ab = am + bn$  を満たす正の整数  $m, n$  は存在しない。

したがって,  $ab + 1$  は題意の条件を満たす限界の値である。