

数チャレ 第44回 (2004年9月)

a, b, c, d, m, n は正の整数であり, $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ を満たすとする。

(1) $\frac{b}{a} < \frac{mb+nd}{ma+nc} < \frac{d}{c}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{1}{ac}$ を満たし, m と n は互いに素であるとき, $ma+nc$ と $mb+nd$ は互いに素であることを示せ。

コメント : (1)の証明では, 整数の条件は用いません。

解答

(1) $a > 0, c > 0$ より

$$\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \iff ad - bc > 0$$

であることに注意する。 $a(ma+nc) > 0, c(ma+nc) > 0$ も考えて

$$\frac{mb+nd}{ma+nc} - \frac{b}{a} = \frac{(mb+nd)a - (ma+nc)b}{(ma+nc)a} = \frac{n(ad-bc)}{a(ma+nc)} > 0$$

$$\frac{d}{c} - \frac{mb+nd}{ma+nc} = \frac{d(ma+nc) - c(mb+nd)}{c(ma+nc)} = \frac{m(ad-bc)}{c(ma+nc)} > 0$$

$$\therefore \frac{b}{a} < \frac{mb+nd}{ma+nc} < \frac{d}{c} \quad (\text{おわり})$$

(注) 座標平面上で $O(0, 0), A(a, b), B(mb+nd, ma+nd), C(c, d)$ として, 直線 OA, OB, OC の傾きを比べるとほとんど明らかである。しかし, 上のような式変形を経験しておく, (2)へのヒントとなる。

(2) $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{1}{ac}$ のとき

$$ad - bc = 1$$

$ma+nc$ と $mb+nd$ について

$$d(ma+nc) - c(mb+nd) = m(ad-bc) = m$$

であるから, $ma+nc$ と $mb+nd$ に共通な素因数 p があるとすれば,

$$p \mid ma+nc, p \mid mb+nd$$

$$\implies p \mid m, p \mid ma+nc, p \mid mb+nd$$

$$\implies p \mid m, p \mid nc, p \mid nd$$

$$\implies p \mid m, p \mid c, p \mid d \quad (\because \gcd(m, n) = 1)$$

$$\implies p \mid ad-bc$$

となるが, $ad-bc=1$ であるから矛盾する。よって,

$ma+nc$ と $mb+nd$ は互いに素である。 (おわり)