

数チャレ 第45回 (2004年10月)

座標平面上に、3つの格子点を頂点とする直角二等辺三角形 T があり、 T の直角をはさむ2辺上には、頂点以外に格子点はないものとする。次のことを示せ。

- (1) T の斜辺上にある格子点は、頂点を除いて0個または1個である。
- (2) T の斜辺上に頂点以外の格子点があるための必要十分条件は、 T の面積が整数となることである。

ただし、座標平面上の格子点とは、 x 座標と y 座標がともに整数である点のことである。

解答

整数は和、差について閉じているから、 T を平行移動させて直角の頂点を原点 O としても、本問の証明には差し支えない。

残りの頂点を A, B とすると、 $OA = OB, OA \perp OB$ より

$$A(a, b), B(b, -a) \quad (a, b \text{ は整数}, a^2 + b^2 \neq 0)$$

としてよい。辺 OA, OB 上には端点以外に格子点はないから、
 a と b は互いに素

である。

- (1) $\overrightarrow{BA} = (a - b, a + b)$ であり、

$$d = \gcd(a - b, a + b)$$

とおくと、 $a + b = 2a - (a - b) = (a - b) + 2b$ より

$$d \mid 2a, d \mid 2b$$

である。 a と b は互いに素であるから、

$$d \mid 2 \quad \therefore d = 1 \text{ または } 2$$

よって、斜辺 AB 上にある格子点は、頂点を除いて0個または1個である。

(証明おわり)

- (2) T の面積を S とすると $S = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ であり、

$$\text{「} S \text{ は整数} \text{」} \iff \text{「} a^2 + b^2 \text{ は偶数} \text{」}$$

$$\iff \text{「} a \text{ と } b \text{ はともに奇数} \text{」} \quad (\because \gcd(a, b) = 1)$$

$$\iff \gcd(a + b, a - b) = 2$$

$$\iff \text{「} T \text{ の斜辺上に頂点以外の格子点がある} \text{」}$$

(証明おわり)

(注) 辺 OA は $y = \frac{b}{a}x, 0 \leq x \leq a$ と表され、 $\frac{b}{a}x$ は $x = 1, 2, \dots, a - 1$ に対して整数にならない。これは、 $a \mid bx \implies a \mid x$ であることを意味するから、 a と b は互いに素である。